Pour sa : 63.3, 64.6, 64.9

Pour dimanche soir : au moins un exercice à rédiger

63.9, 63.10, 64.21, 64.22

Formules de Taylor

25. Qu'est-ce que le polynôme de Taylor d'une fonction ?
26. Énoncer la formule de Taylor avec reste intégral.
27. Comment démontrer la formule précédente ?
28. Énoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange.

25 Soit $f : I \to \mathbb{K}$ si f $\mathcal{C}^n$.

le polynôme de Taylor de f d'ordre n

$$T_n(f)(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} X^k$$

Rmq : Si on veut travailler en $a \neq 0$,

on travaille avec $f(x) = f(a+h)$ où $h \to 0$

26. Formule de Taylor = remplacer $f(x)$ par un polynôme.

contrôler le reste.

Si f est $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I

Rq : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$

$[0,x]$

que vaut $f(x)$ et l'aide $f(0), f'(0) \ldots f^{(n)}(0)$

$$\left[- \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)\,n!} f^{(n+1)}(t) \right]_0^x - \int_0^x (-) \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\, dt$$

$$= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\, dt$$

28 Soit f $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I, $0, x \in I$

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| = \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt \right|$$

1er cas $x > 0$

$$\leq \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \left| f^{(n+1)}(t) \right| dt$$

$$\leq \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \| f^{(n+1)} \|_\infty^{[0,x]} \, dt$$

$$= \| f^{(n+1)} \|_\infty^{[0,x]} \left[- \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^x$$

$$= \| f^{(n+1)} \|_\infty^{[0,x]} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

2e cas : $x < 0$

$$\left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \right| \leq \int_x^0 \left| \frac{\overbrace{(x-t)^n}^{<0}}{n!} f^{(n+1)}(t) \right| dt$$

$$= \int_x^0 \frac{\overbrace{(t-x)^n}^{\geq 0}}{n!} \left| f^{(n+1)}(t) \right| dt$$

$$\leq \| f^{(n+1)} \|_\infty^{[x,0]} \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!}\,dt$$

$$= \| f^{(n+1)} \|_\infty^{[0,x)} \left[\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_x^0$$

$$= \| f^{(n+1)} \|_\infty^{[0,x)} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$