Certification Pix → répondre au formulaire sur le site

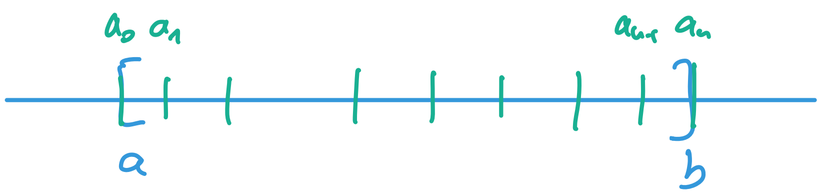
Intégration sur un segment des fonctions numériques

Je me souviens — l'intégrale comme un nombre

Fonctions continues par morceaux

1. Qu'est-ce qu'une **subdivision** du segment $[a, b]$?
2. Qu'est-ce qu'une fonction **continue par morceaux** sur $[a, b]$?
3. Que dire d'une combinaison linéaire de deux fonctions continues par morceaux ? d'un produit de deux fonctions continues par morceaux ?
4. Prêt à le démontrer ?
5. Est-ce que l'ensemble $\mathcal{C}_{\text{pm}}([a, b], \mathbb{K})$ des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ possède une structure particulière ?

1.



$\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ subdivision de $[a, b]$

si $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$

Il y a un nb fini de points.

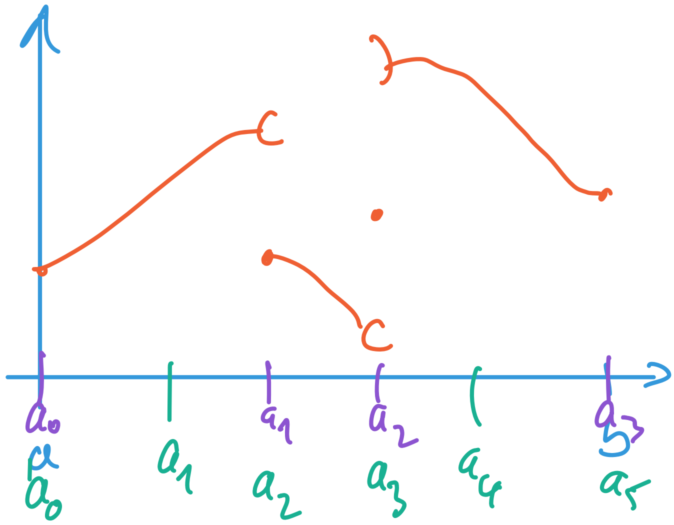
Souvent subd. à pas constant

$$\left(a_k = a + k\,\frac{b-a}{n} \right)_{0 \le k \le n}$$

2. Définition :

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

f est continue par morceaux si



il existe $\sigma = (a_0 \ldots a_n)$ subd de $[a,b]$

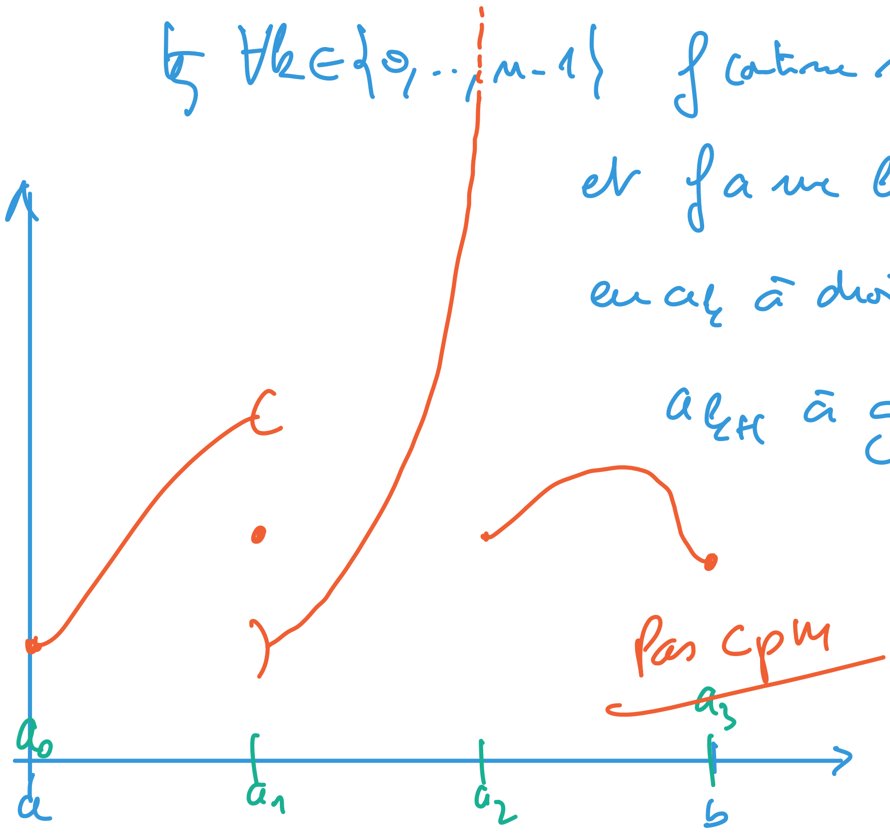
appelée "adaptée" à f.

tq $\forall k \in \{0, \ldots, n-1\}$ f continue sur $]a_k, a_{k+1}[$

et f a une limite finie

en a_k à droite, en

a_{k+1} à gauche



ou <u>encore</u>;

$f|_{]a_k, a_{k+1}[}$ se prolonge à $[a_k, a_{k+1}]$ de façon continue.

3. oui CL de fct cpm sont cpm
produit aussi

4. $\lambda f + \mu g$

5. $\mathcal{C}_{pm}([a,b], \mathbb{K})$ algèbre.

Intégrale d'une fonctions cpm sur un segment

6. Quel est le lien entre $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$?
7. Énoncer la relation de Chasles.
8. Qu'est-ce que la linéarité de l'intégrale ?
9. Qu'est-ce que la positivité de l'intégrale ? la croissance de l'intégrale ?
10. Qu'est-ce que l'inégalité triangulaire pour les intégrales ?
11. Que dire face à une intégrale nulle d'une fonction positive ?

6. $\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt$

$$\int_{[a,b]} f(t)\,dt$$

7. $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$

8. f, g cpm sur $[a,b]$

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \mu \int_a^b g(t)\,dt$$

9. Si $\cancel{f \geq 0}$ alors $\int_a^b f(t)\,dt \geq 0$

$\forall t \in [a,b]\ f(t) \geq 0$

$a \leq b$

Si $\forall t \in [a,b]\ f(t) \leq g(t)$

alors $\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$

10 $\left| \int_a^b f(t)\,dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$ $a \leq b$

Rmq : $\cancel{\left| \int_a^b f(t)\,dt \right| \leq \left| \int_a^b |f(t)|\,dt \right|}$ même si $a > b$

11 Si $\int_a^b f(t)\,dt = 0$ on parle de $\int_a^b f(t)\,dt$ pour f cpm sur $[a,b]$

$f(t) \geq 0 \quad \forall t \in [a,b]$

f continue sur $[a,b]$

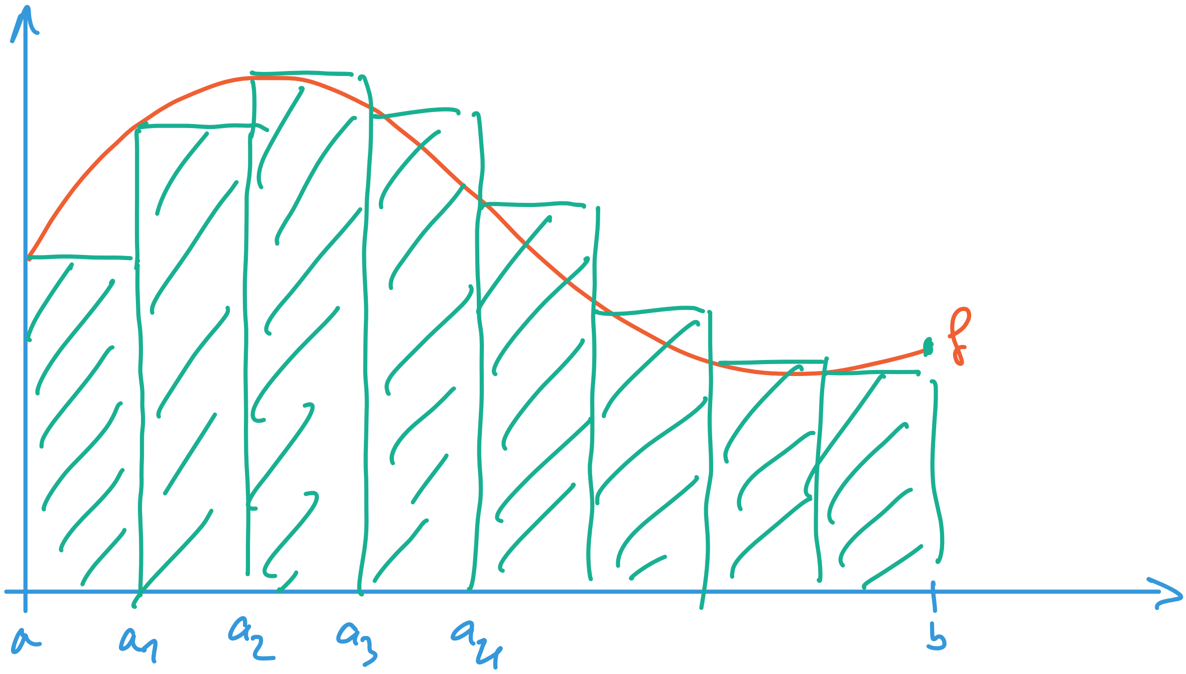
alors $f(t) = 0 \quad \forall t \in [a,b]$

"Intégrale nulle d'une fct continue et positive"

Sommes de Riemann

12. Que dit le théorème sur les sommes de Riemann ?

↳ méthode des rectangles



$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right) \times \frac{b-a}{n}$$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)$$

Résultat : Si f continue sur $[a,b]$

alors $R_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f(t)\,dt$

Utilisation (en maths)

Quand intervient des sommes

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k, n)$$

se débrouiller pour l'écrire

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)$$

où $a =$ $\quad b =$ $\quad f = \ldots$

Je me souviens — l'intégrale comme une fonction de la borne d'en haut

Intégrale et primitive

13. Qu'appelle-t-on **primitive** d'une fonction f ?
14. Quelle est la classe des primitives de fonctions continues ?
15. Que dire de deux primitives d'une même fonction sur un intervalle ?
16. Énoncer le théorème fondamental, qui fait le lien entre intégrale et primitive.
17. Si f est continue, comment dériver $x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$?

13 Une primitive de f est F tq $F' = f$.

14. $\mathcal{C}^1$

15 Si F, G primitives de f sur I intervalle,
$\exists K$ tq $\forall x \in I,\ F(x) = G(x) + K$

16 Soit f continue (ou cpm ?) sur I intervalle

Prenons $a \in I$.

$$F : x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$$

est une primitive de f (celle qui s'annule en a)

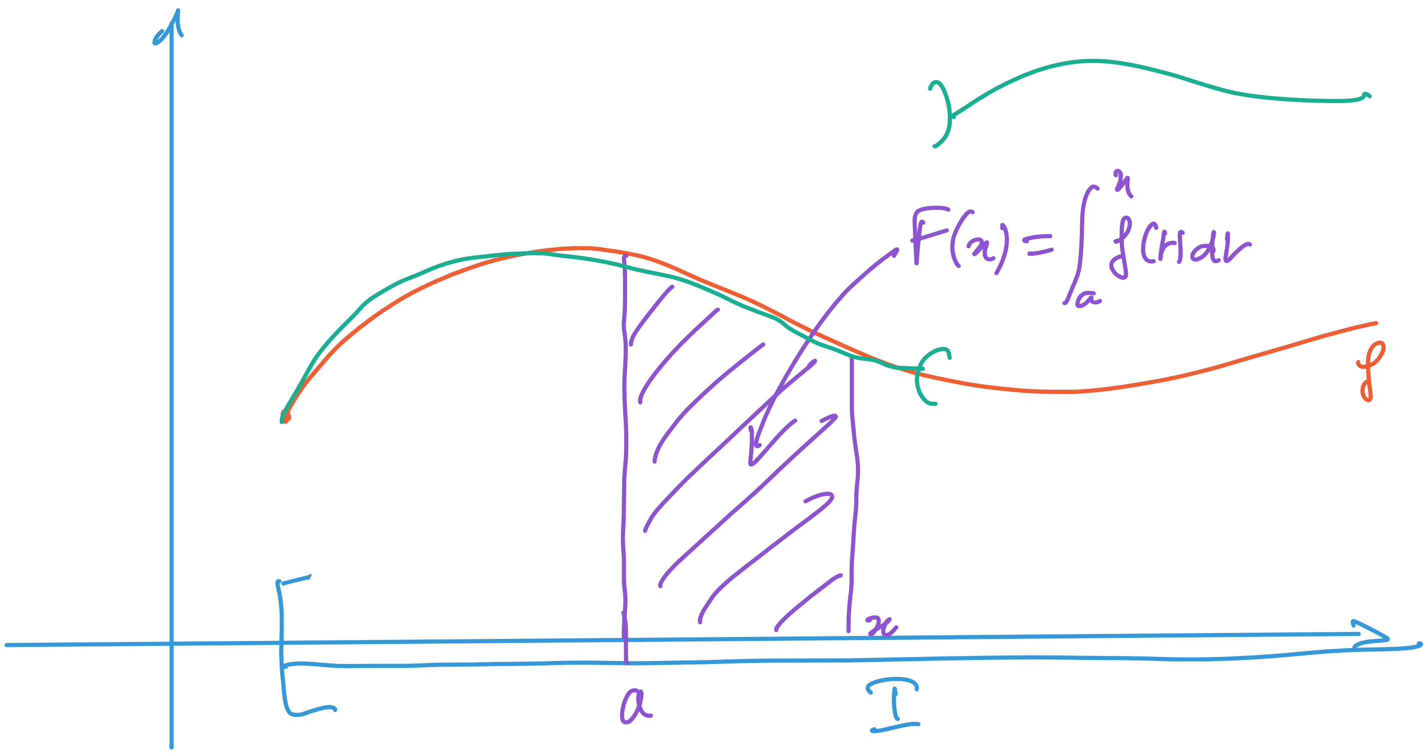
Si f est cpm, alors F est dérivable
en tout point à droite et à gauche, et

$$F'_g(x_0) = \lim_{x \underset{<}{\to} x_0} f(x)$$

$$F'_d(x_0) = \lim_{x \underset{>}{\to} x_0} f(x)$$

Résumé : Si f cpm, F existe, est continue

Si f continue F existe et F dérivable.



Intégration par parties, changement de variable

18. Qu'appelle-t-on « intégration par parties » ?

19. Comment faire un changement de variable pour le calcul d'une intégrale ?

$$\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt = \Big[f(t)\, G(t) \Big]_a^b - \int_a^b f'(t)\, G(t)\, dt$$

(où f et G sont $\mathcal{C}^1$)

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\, \varphi'(u)\, du$$

on pose $t = \varphi(u)$

$dt = \varphi'(u)\, du$

t de a à b $\Leftrightarrow$ u varie de $\underset{\alpha}{?}$ $\underset{\beta}{?}$

Primitives usuelles

20. Donner une primitive de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Arcsin x
21. Donner une primitive de $\ln x$. $x\ln x - x$
22. Donner une primitive de $\dfrac{1}{1+x^2}$. Arctan x
23. Donner une primitive de $\dfrac{1}{1-x^2}$.
24. Donner une primitive de $\dfrac{1}{1+x+x^2}$.

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{(1+x)+(1-x)}{2(1-x)(1+x)}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+x}$$

une primitive est donc $-\frac{1}{2}\ln|1-x| + \frac{1}{2}\ln|1+x|$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

$$\int \frac{1}{1+x+x^2}\,dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dx$$

on pose $x+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}t$

$dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dt$

$$= \int \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\frac{\sqrt{3}}{2}dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} t \qquad + cste$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2}\right) \right) + cste$$

Formules de Taylor

25. Qu'est-ce que le polynôme de Taylor d'une fonction ?
26. Énoncer la formule de Taylor avec reste intégral.
27. Comment démontrer la formule précédente ?
28. Énoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange.