Pour ve : 63.1, 63.2, 63.5

Dérivation des fonctions numériques

Je me souviens

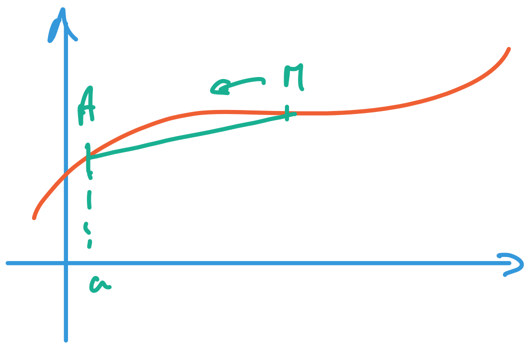
Dérivée

1. Comment définir la dérivée en a de $f : I \to \mathbb{K}$.
2. Équation de la tangente ?
3. Une ~~autre définition~~ caractérisation de la dérivée ?
4. Dérivée à droite ? à gauche ?
5. Lien entre dérivabilité et continuité ?
6. Dérivée des fonctions $I \to \mathbb{C}$?
7. Quelle est la dérivée de $\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}$?

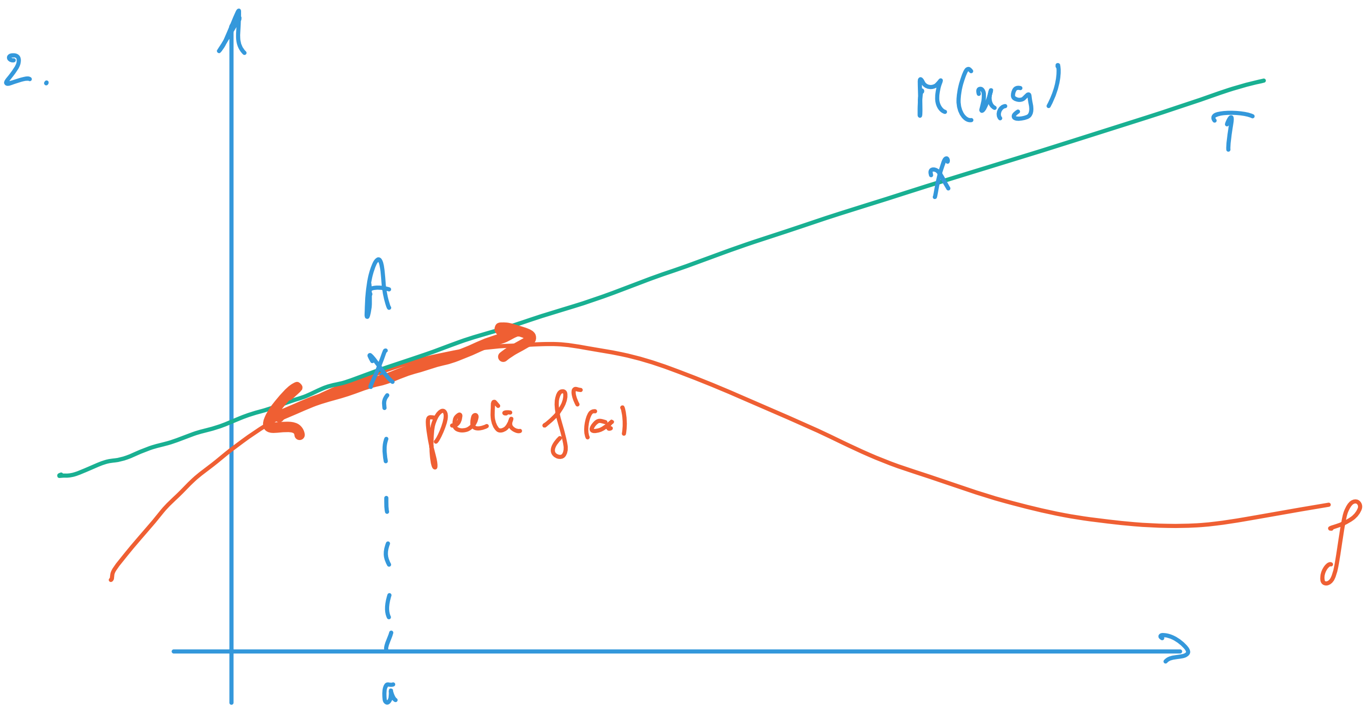
1-

Si $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a une limite finie en $h \to 0$, alors f dérivable en a et $f'(a)$ est cette limite

(dérivée à droite, à gauche)



2.



$M(x,y) \in T \iff$ pente de (AM) est $f'(a)$

$$\iff \frac{y - f(a)}{x-a} = f'(a)$$

$$\iff y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

3. f dérivable en $a \iff f$ a un $DL_1(a)$

ie $\exists p \in \mathbb{R}$ tq

$$f(a+h) = f(a) + p \cdot h + \underset{h \to 0}{o}(h)$$

Dans ce cas : f dérivable en a

et $f'(a) = p$.

Rmq : Taylor-Young

Si f est $\mathcal{C}^n$

alors f a un $DL_n(a)$ et

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + o(h^n)$$

5. Si f dérivable en a alors f continue en a.

Réciproque fausse :

ex : $x \mapsto \sqrt{x}$ est cont, non dérivable en 0

6. $f : I \to \mathbb{C}$ I int de $\mathbb{R}$.

$x \longmapsto f(x)$

on définit $\mathrm{Re}(f) : I \to \mathbb{R}$

$\mathrm{Im}(f) : I \to \mathbb{R}$

On justifie f dérivable en a

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ dérivables en a.

et $f'(a) = (\mathrm{Re} f)'(a) + i\,(\mathrm{Im} f)'(a)$

7: $f(t) = e^{(1+i)t}$

f est dérivable et $f'(t) = (1+i)e^{(1+i)t}$

$\forall \alpha \in \mathbb{C} \quad \frac{d}{dt}(e^{\alpha t}) = \alpha e^{\alpha t}$

Rappel : $e^{(1+i)t} = e^t \cdot e^{it}$

$$= e^t \left(\cos t + i \sin t \right)$$

<u>Rmk:</u> $$e^{(1+i)t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left((1+i)t\right)^n}{n!}$$

$$\Big\downarrow \frac{d}{dt} \ ?$$

Théorème de Rolle

On ne parle ici que de fonctions réelles.

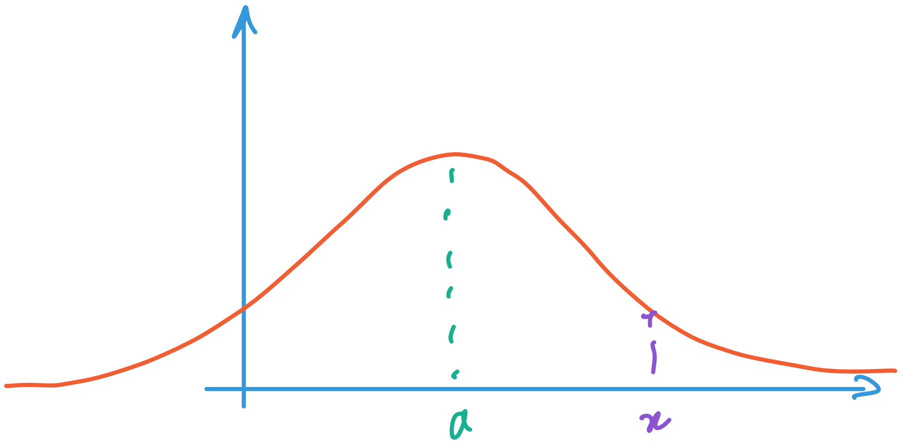
8. Pour $f : I \to \mathbb{R}$, définir « f admet un maximum global en a ».

9. Pour $f : I \to \mathbb{R}$, définir « f admet un maximum local en a ».

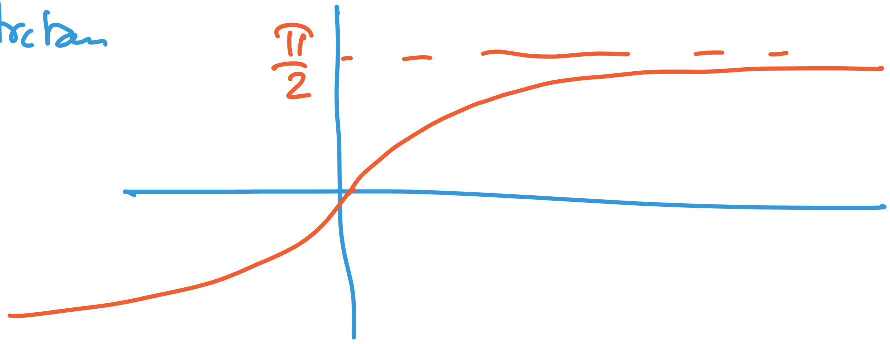
10. Énoncer le théorème faisant le lien entre extremum local et annulation de la dérivée.

11. Énoncer le théorème de Rolle.

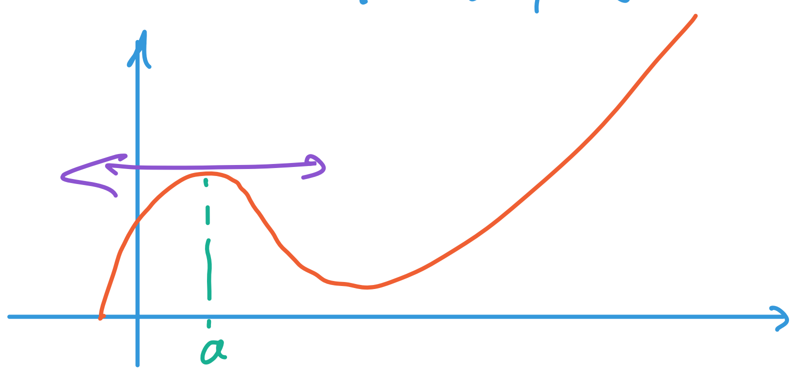
8. $\forall x \in I, \qquad f(x) \leq f(a)$



exp, Arctan



9. $\exists \eta > 0$ tq $\forall x \in I \cap [a-\eta, a+\eta], \quad f(x) \leq f(a)$



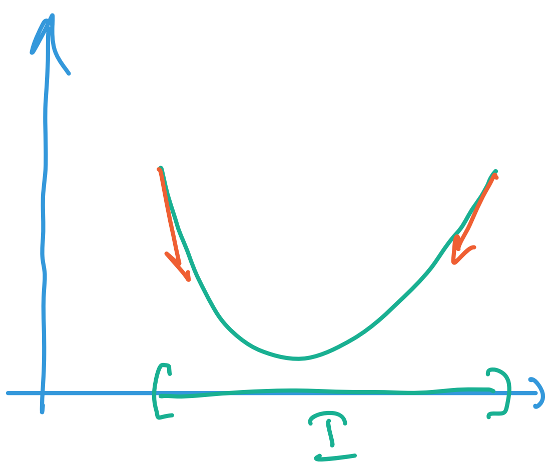
$\exists \eta$ tq $f|_{[a-\eta, a+\eta]}$ a un max en a.

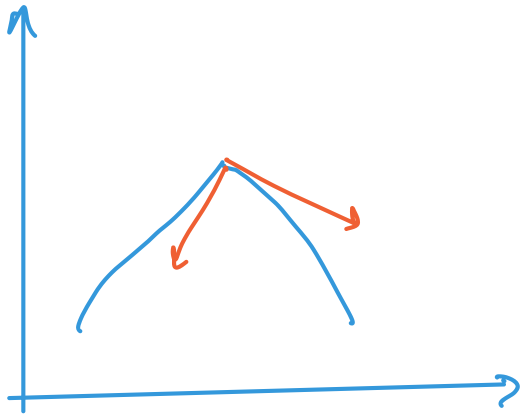
10. Si f dérivable sur I

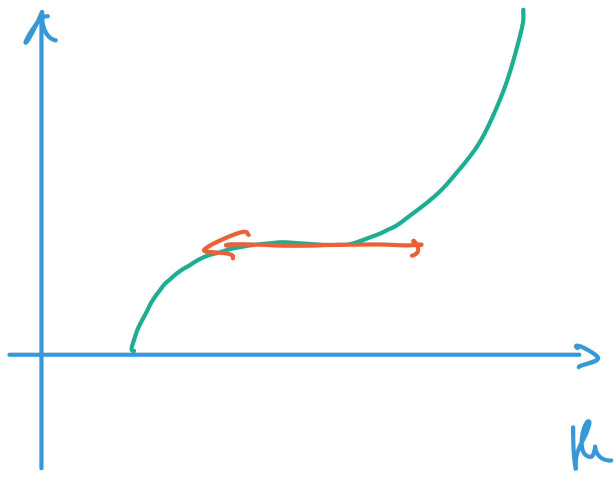
f admet un extremum local en a

a n'est pas une extrémité de I

alors $f'(a) = 0$.







Th des bornes atteintes

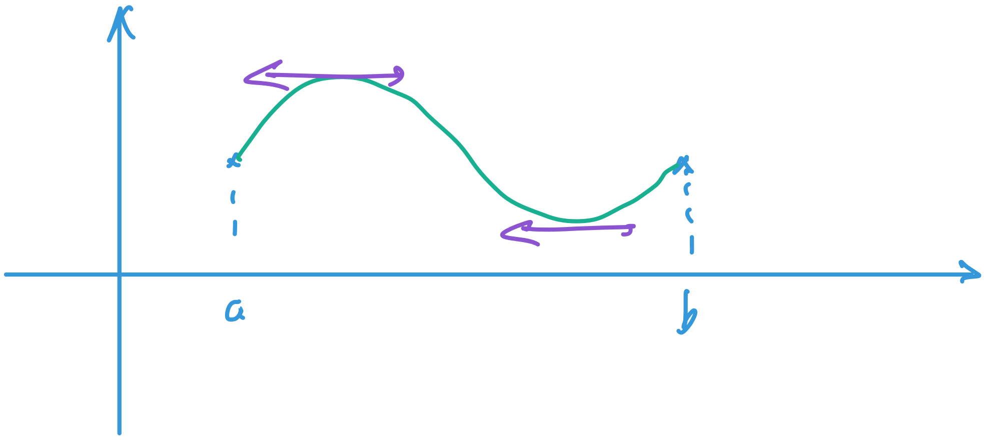
11 Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(a) = f(b)$

f dérivable sur $[a,b]$ dérivable sur $]a,b[$
continue sur $[a,b]$

alors $\exists c \in \cancel{[a,b]}$ tq $f'(c) = 0$

$c \in]a,b[$



Rmq. Souvent, on l'applique plusieurs fois.

Accroissements finis

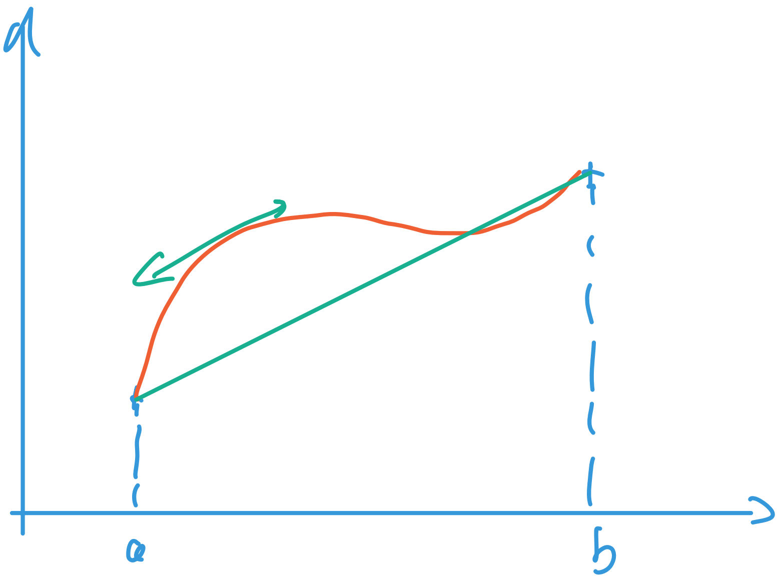
12. Quelle est l'égalité des accroissements finis ?
13. Quelle est l'inégalité des accroissements finis ?
14. Il y a un lien avec le théorème fondamental de l'analyse ?
15. À quelle condition f dérivable est-elle consante ?
16. À quelle condition f dérivable à valeurs réelles est-elle croissante ?
17. À quelle condition f dérivable à valeurs réelles est-elle strictement croissante ?

12 Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable sur $]a, b[$

continue sur $[a, b]$

Alors $\exists c \in]a, b[$ tq

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$



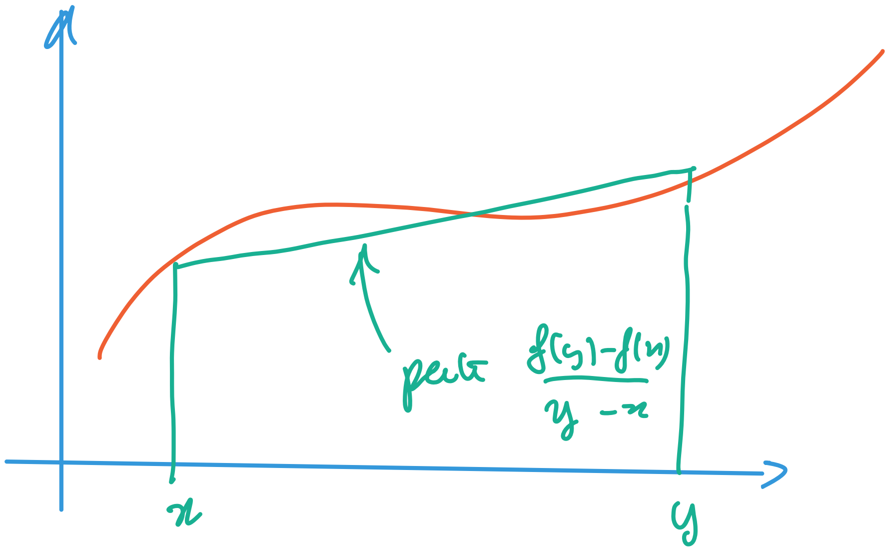
13 inégalités des A.F.

Si f est dérivable sur I, $x, y \in I$

et f' est bornée sur I,

alors

$$\left| \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \right| \leq \|f'\|_\infty^I$$



En particulier : Si f est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ segment,

f' continue sur un segment, donc bornée

et f est lipschitzienne.

15. $f'=0$

14 Si f est $\mathcal{C}^1$ sur $I=[a,b]$

alors $f(b)-f(a) = \int_a^b f'(t)\,dt$

Pour g continue $\int_a^b g(t)\,dt = [G(t)]_a^b$

où G une primitive

$$|f(b)-f(a)| = \left| \int_a^b f'(t)\,dt \right|$$
$$\leq \int_a^b |f'(t)|\,dt$$
$$\leq \int_a^b \|f'\|_\infty\,dt$$
$$= \|f'\|_\infty \int_a^b dt$$
$$= \|f'\|_\infty (b-a)$$

<u>Rmq</u> ex de fct dérivable, pas $\mathcal{C}^1$

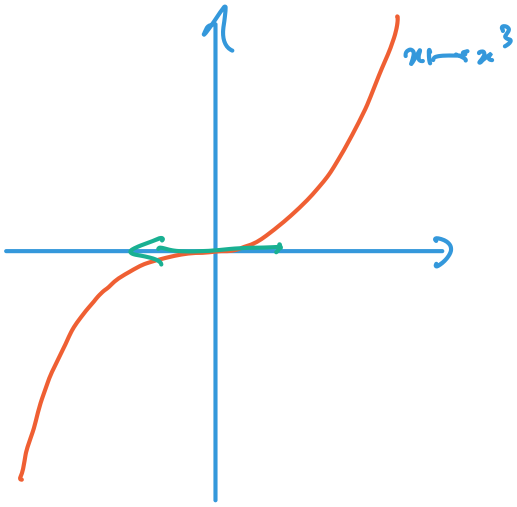
?

<u>16</u> $\forall x \in I \quad f'(x) \geq 0$ (⚠ <u>Intervalle</u>)

<u>17</u> f strictement croissante sur I intervalle

$\iff \forall x \in I \quad f'(x) \geq 0$ et

f' ne s'annule sur aucun intervalle ouvert non vide.



Opérations sur les fonctions dérivables

18. $(\lambda f + \mu g)'(x) =$

19. $(f \times g)'(x) =$

20. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) =$

21. $(g \circ f)'(x) =$

22. $(f^{-1})'(x) =$

Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

23. Définir « f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I »
24. Définir « f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I », où $k \in \mathbb{K}$.
25. Définir « f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I »
26. $(\lambda f + \mu g)^{(k)}(x) =$
27. Énoncer la formule de Leibniz.
28. Comment démontrer la formule de Leibniz ?
29. Pour $f : I \to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^k$ et $\phi : J \to I$ de classe $\mathcal{C}^k$, que dire de $f \circ \phi$?

23 f est dérivable sur I et f' continue sur I

24 par récurrence

f est $\mathcal{C}^{k+1}$ signifie f est $\mathcal{C}^k$ et $f^{(k)}$ est $\mathcal{C}^1$

25 f est $\mathcal{C}^k$ $\forall k$

27 Si f et g k-fois dérivables

alors $f \times g$ est k-fois dérivable et

$$(f \times g)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)}$$

28 Preuve: par récurrence

rel. de Pascal $\binom{k}{i} = \binom{k-1}{i} + \binom{k-1}{i-1}$

29

$$J \xrightarrow[\mathcal{C}^k]{\phi} I \xrightarrow[\mathcal{C}^k]{f} \mathbb{K}$$

$$x \longmapsto \phi(x) \longmapsto f(\phi(x))$$

$f \circ \phi$ est $\mathcal{C}^1$ sur J.

et $(f \circ \phi)' = \phi' \times (f' \circ \phi)$

<u>Remarc</u> : la composée de 2 fct $\mathcal{C}^k$ est $\mathcal{C}^k$

<u>Hérédité</u> on suppose que la composée de 2 fct $\mathcal{C}^k$ est $\mathcal{C}^k$.

Soit f, ϕ $\mathcal{C}^{k+1}$

en part. f et ϕ sont $\mathcal{C}^1$ donc

$f \circ \phi$ est $\mathcal{C}^1$ et $(f \circ \phi)' = \phi' \times (f' \circ \phi)$

où f' est $\mathcal{C}^k$ et ϕ $\mathcal{C}^k$ et ϕ' est $\mathcal{C}^k$

donc par HR, $f' \circ \phi$ est $\mathcal{C}^k$

donc par Leibniz $(f \circ \phi)'$ est $\mathcal{C}^k$

donc $f \circ \phi$ est $\mathcal{C}^{k+1}$

$(f \circ \phi)' =$

$(f \circ \phi)'' =$

$(f \circ \phi)''' =$ $\leftarrow$ pas de formule générale.

Limite de la dérivée

30. Énoncer le théorème limite de la dérivée.

31. Comment utiliser le résultat précédent pour prolonger à I de façon $\mathcal{C}^1$ une fonction définie sur $I \setminus \{a\}$?

30 Th limite de la dérivée

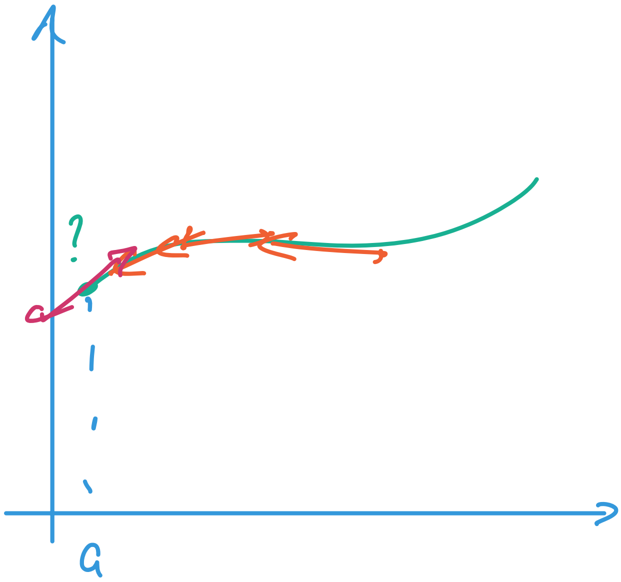
Si f dérivable sur $I \setminus \{a\}$

f' a une limite finie ℓ en a

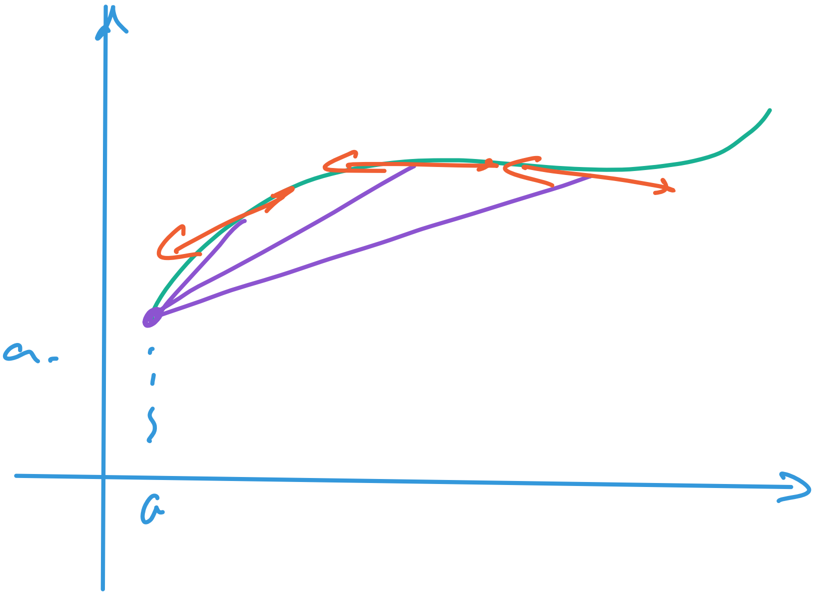
f continue en a

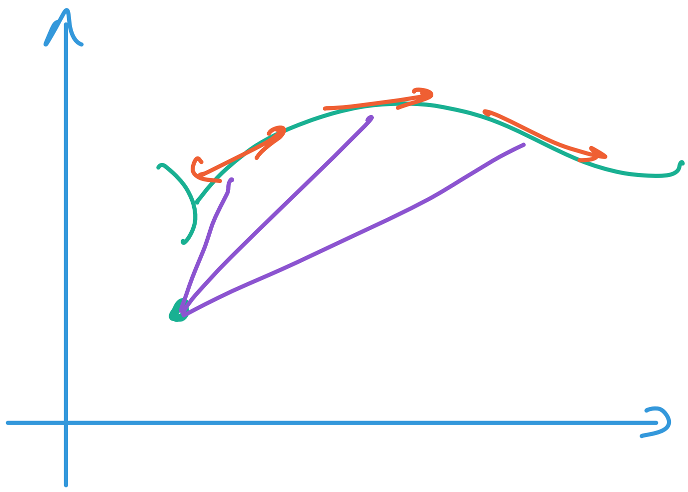
alors f dérivable en a

et $f'(a) = \ell$



Rmq. quand le Th s'applique, f' est toujours continue en a.





Version "pratique"

Si f est $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$

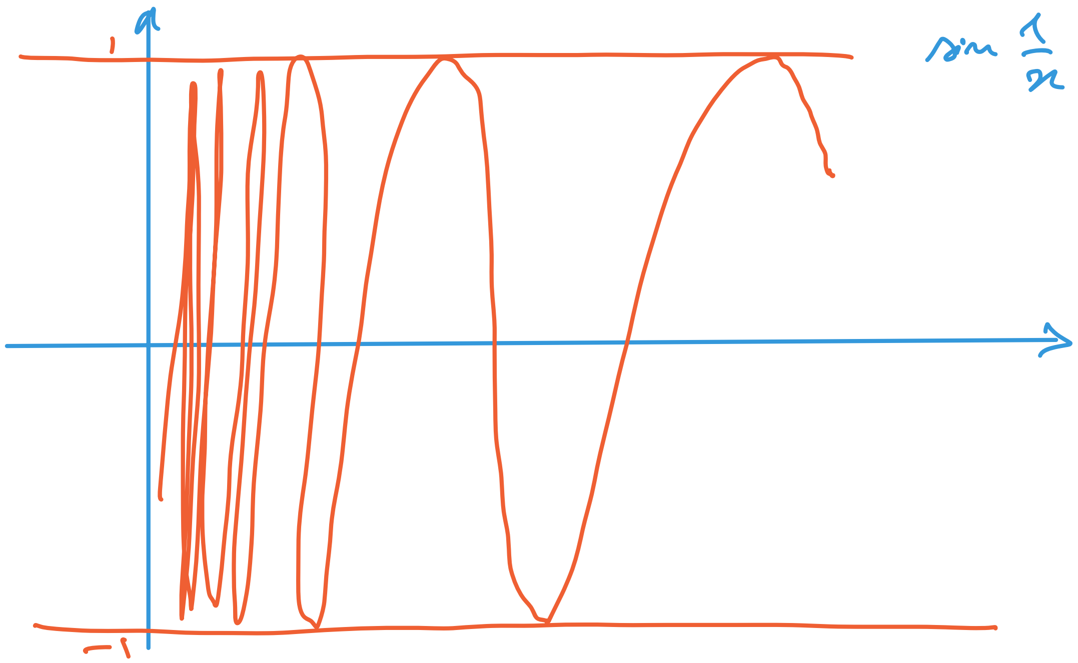
continue en a

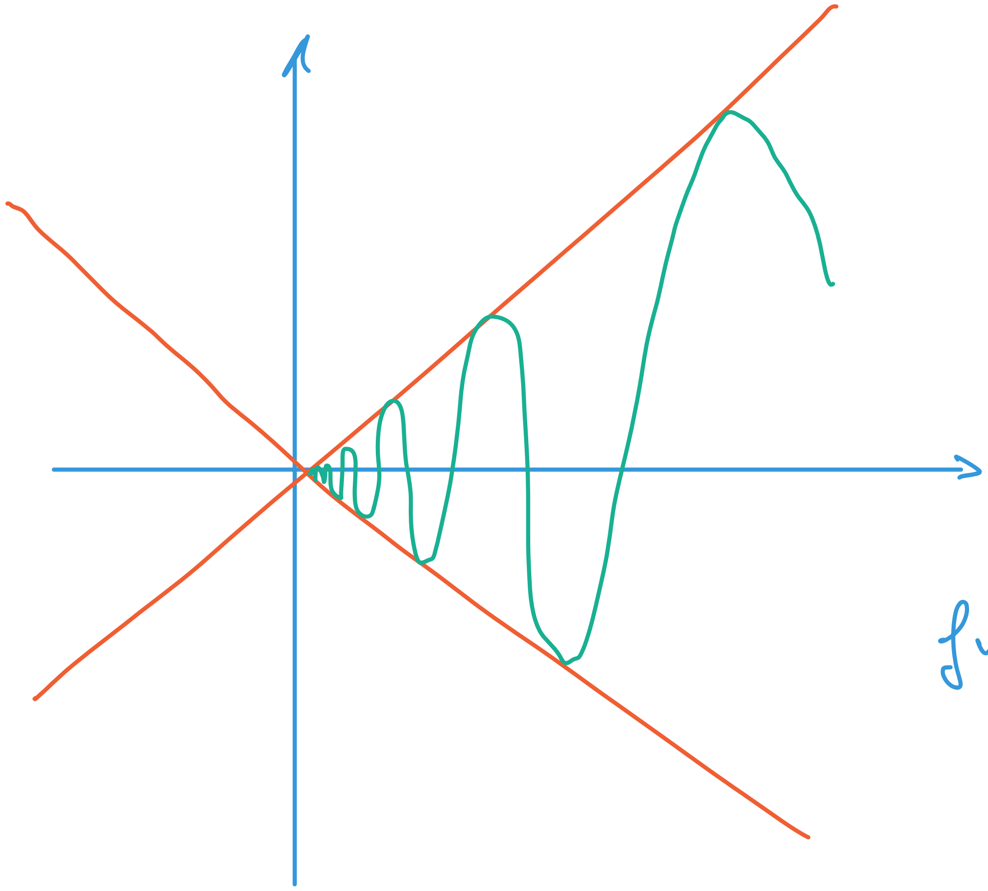
$f'(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$

Alors f est $\mathcal{C}^1$ sur I

et $f'(a) = \ell$

(Ça démontre f $\mathcal{C}^1$. Pas utilisable pour f dérivable mais pas $\mathcal{C}^1$).



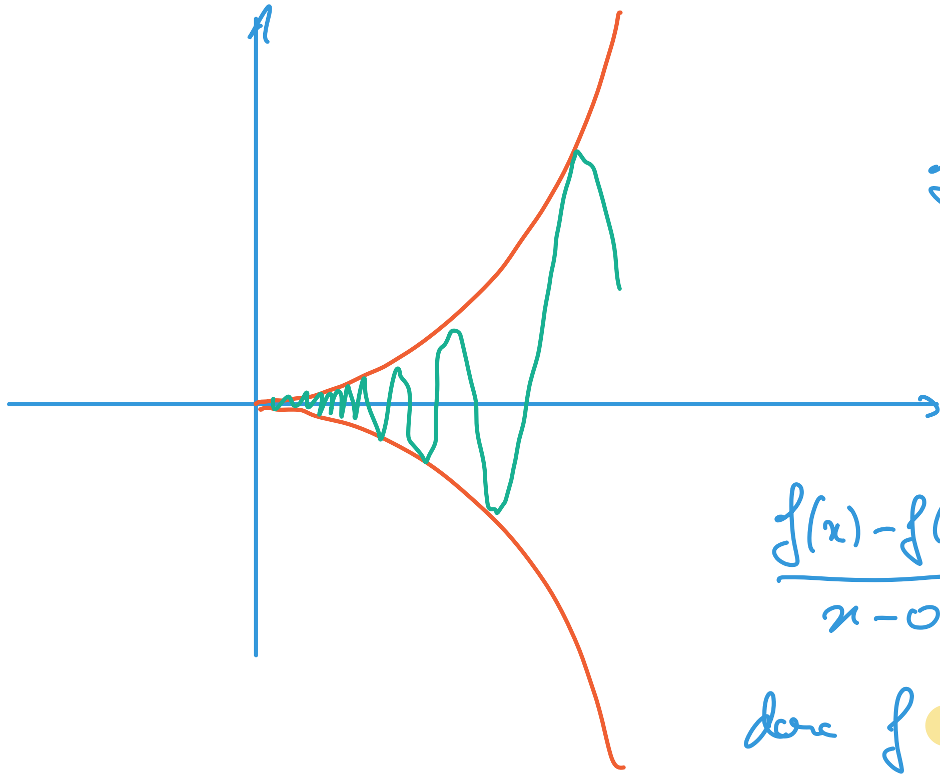


$f : x \sin \frac{1}{x}$

$f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

$|f(x)| \leq |x| \to 0$

f non dérivable en 0.



$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$

f se prolonge par continuité en 0

avec $f(0) = 0$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

donc f dérivable en 0

et $f'(0) = 0$

f' n'a pas de limite en 0

$$f'(x) = \underbrace{2x \sin \frac{1}{x}}_{\underset{x \to 0}{\downarrow}\ 0} + \underbrace{x^2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cos \frac{1}{x}}_{\text{pas de limite}}$$

donc f n'est pas $\mathcal{C}^1$.