- <u>Certification PIX</u> prévue le mardi 3 décembre matin, sur l'horaire des TP de physique.
- <u>pour je</u> : 26.23, 26.24
- <u>Samedi</u> math en B317
- <u>calendrier des concours</u>.

5 Nilpotence

5.1 Endomorphisme nilpotent, indice de nilpotence

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est **nilpotent** lorsqu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que :

$$u^k = 0$$

Dans ce cas, le plus petit entier k satisfaisant cette propriété s'appelle l'**indice de niplotence** de u.

Remarque. *Ainsi, si u est nilpotent d'indice m, on a :*

$$u^m = 0 \quad \text{et} \quad u^{m-1} \neq 0$$

5.2 Polynôme minimal, polynôme caractéristique d'un endomorphisme nilpotent

Proposition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

- u est nilpotent $\iff \chi_u = X^n$
- u est nilpotent d'indice $m \iff \pi_u = X^m$

Corollaire. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice m. Alors :

$$m \leqslant n \qquad \text{car } \pi_u \mid \chi_u$$

X^m annulateur de u donc $Sp(u) \subset \{\text{racines de } X^m\} = \{0\}$

donc χ_u est unitaire, de degré n, avec 0 seule racine.

donc c'est X^n

(dans $\mathbb{C}$, donc dans $\mathbb{R}$)

5.3 Nilpotence et trigonalisabilité d'un endomorphisme

Théorème.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable et a 0 pour seule valeur propre.

$\boxed{\Rightarrow}$ $\chi_u = X^n$ scindé

donc u est trigonalisable

et $Sp(u) = \{vp \text{ de } \chi_u\} = \{0\}$

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose u trigonalisable et $Sp(u) = \{0\}$

donc $\exists \mathcal{B}$ base de E tq

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix} = T$$

alors $\chi_u = \chi_T = X^n$

par le th de Cayley-Hamilton, $u^n = 0$

donc u est nilpotent.

5.4 Traduction matricielle des résultats précédents

Définition. On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **nilpotente** lorsqu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que :

$$A^k = 0$$

Dans ce cas, le plus petit entier k satisfaisant cette propriété s'appelle l'**indice de niplotence** de A.

Remarque. *Ainsi, si A est nilpotent d'indice m, on a :*

$$A^m = 0 \quad \text{et} \quad A^{m-1} \neq 0$$

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

- A est nilpotent $\iff \chi_A = X^n$
- A est nilpotent d'indice $m \iff \pi_A = X^m$

Corollaire. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente d'indice m. Alors :

$$m \leqslant n$$

Théorème.

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente si et seulement si elle est trigonalisable et a 0 pour seule valeur propre.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \text{ nilpotente}$$

Théorème.

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente si et seulement si elle est trigonalisable et a 0 pour seule valeur propre.

Corollaire. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente si et seulement si $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$.

Exemple. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ a pour unique valeur propre réelle 0, et pourtant n'est pas nilpotente.

$\chi_u = X(X^2+1)$ $\qquad$ $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u) = \{0\}$

Remarque. *Une matrice nilpotente n'est pas toujours triangulaire. Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ est nilpotente.*

A $\qquad$ $\chi_A = (X-1)^2(X-2)$

$\dim E_1(A) = 1 < 2 = m(1)$

$E_1(A) \oplus E_2(A) \subset \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$(X-1)^2$ et $(X-2)$ sont premiers entre eux

Par le lemme des noyaux

$$\operatorname{Ker} (X-1)^2(A) \oplus \operatorname{Ker} (X-2)(A)$$
$$= \operatorname{Ker} \left((X-1)^2 (X-2) (A) \right)$$

ie $$\operatorname{Ker} \left((A - I_3)^2 \right) \oplus \operatorname{Ker} (A - 2 I_3)$$
$$= \operatorname{Ker} \left(\chi_A (A) \right)$$
$$= \operatorname{Ker} \left(0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \right)$$

par Cayley-Hamilton

$$= \mathcal{M}_{31} (\mathbb{R})$$

6 Sous-espaces caractéristiques

6.1 Sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme lorsque χ_u est scindé.

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Si λ est une valeur propre de u, de multiplicité m_λ, on appelle **sous-espace caractéristique de** u **associé à** λ l'espace :

$$N_\lambda(u) = \mathrm{Ker}\left((u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{m_\lambda}\right)$$

Rmq : $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$

$\subset \mathrm{Ker}\,(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{m_\lambda} = N_\lambda(u)$

Proposition. Avec les notations de la définition : si χ_u est scindé.

- $E_\lambda(u) \subset N_\lambda(u)$
- $N_\lambda(u)$ est stable par u
- $N_\lambda(u)$ est de dimension m_λ
- En notant u_λ l'endomorphisme induit par u sur $N_\lambda(u)$, on a $\chi_{u_\lambda} = (X - \lambda)^{m_\lambda}$.

Preuve :

- $E_\lambda(u) \subset N_\lambda(u)$ oui
- $N_\lambda(u) = \mathrm{Ker}\left((u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{m_\lambda}\right)$

  $(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{m_\lambda}$ est un polynôme de u

  donc commute avec u

  donc $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{m_\lambda}$ stable par u.
- On peut donc définir l'endomorphisme induit

  $$u_\lambda : \begin{array}{ccc} N_\lambda(u) & \longrightarrow & N_\lambda(u) \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}$$

  On sait que $(X - \lambda)^{m_\lambda}$ est annulateur de u_λ car $\forall x \in N_\lambda(u)$

  $$(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{m_\lambda}(x) = 0$$

et même $u_\lambda - \lambda Id_{N_\lambda}$ est nilpotent.

donc $u_\lambda - \lambda Id_{N_\lambda}$ est trigonalisable et

0 est sa seule vp, donc

$$\chi_{u_\lambda} = (X-\lambda)^{\dim N_\lambda}$$

Or $\chi_{u_\lambda} \mid \chi_u = (X-\lambda)^{m_\lambda} Q$

où $Q(\lambda) \neq 0$

donc $\underline{\dim N_\lambda \leq m_\lambda}$

On a $\chi_u = \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X-\lambda)^{m_\lambda}$

les $(X-\lambda)^{m_\lambda}$ sont premiers entre eux, donc

par le lemme des noyaux

$$\ker(\chi_u(u)) = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} \ker\left((u - \lambda Id_E)^{m_\lambda}\right)$$

$$E = \ker(0) \quad \text{(Cayley-Hamilton)}$$

$$\bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} N_\lambda(u)$$

$\dim E = n = \sum_{\lambda \in Sp(u)} m_\lambda$ parce que χ_u scindé

et

$$n = \dim \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} N_\lambda = \sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim N_\lambda$$

$\sum_{\lambda \in Sp(u)} m_\lambda - \dim N_\lambda = 0$ par différence

Somme nulle de termes positifs

donc $\forall \lambda \in Sp(u)$, $m_\lambda - \dim N_\lambda = 0$

CCl. $\dim N_\lambda = m_\lambda$

- On a vu $\chi_{u_\lambda} = (X-\lambda)^{\dim N_\lambda}$

$$= (X-\lambda)^{m_\lambda}$$

À retenir :

$N_\lambda(u)$ est stable par u

$\dim N_\lambda(u) =$ mult. de λ dans χ_u.

On a vu "en passant" : (sous réserve que χ_u scindé)

$$E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} N_\lambda(u)$$

Théorème.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose χ_u scindé. Alors :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} N_\lambda(u)$$

De plus, en notant :

$$\chi_u = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}$$

où les valeurs propres λ_i sont deux à deux distinctes, et les multiplicités m_i sont dans $\mathbb{N}^*$, il existe une base de E dans laquelle u est représentée par la matrice diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_1 \end{matrix} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \begin{matrix} \lambda_r & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_r \end{matrix} \end{pmatrix}$$

blocs diagonaux : $\lambda_i I_{m_i} + \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix}$

Preuve : Pour toute vp λ_i, N_{λ_i} est stable par u, on définit u_{λ_i} endomorphisme induit par u.

On a vu $\chi_{u_{\lambda_i}} = (X - \lambda_i)^{m_i}$ scindé

donc u_{λ_i} trigonalisable : $\exists B_i$ base de N_{λ_i} tq

$$\mathrm{Mat}(u_{\lambda_i}, B_i) = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_i & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_i \end{pmatrix}}_{m_i}$$

$E = \bigoplus_{i=1}^{r} N_{\lambda_i}$ (par le lemme des noyaux) donc par concaténation de bases,

$$\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_r) \text{ base de } E$$

et

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \mathrm{Mat}(u_{\lambda_1}, \mathcal{B}_1) & & (0) \\ & \mathrm{Mat}(u_{\lambda_2}, \mathcal{B}_2) & \\ (0) & & \ddots & \\ & & & \mathrm{Mat}(u_{\lambda_r}, \mathcal{B}_r) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} + \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r I_{m_r} + \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

On a ainsi trigonalisé u.

Rmq. On a donc une façon "pratique" de trigonaliser. On identifie chaque $N_\lambda(u)$. On trigonalise l'endomorphisme induit en proposant une base adaptée, par exemple une base où la matrice $u_\lambda - \lambda \mathrm{Id}_{N_\lambda}$ est $\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose χ_u scindé. Alors :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} N_\lambda(u)$$

De plus, en notant :

$$\chi_u = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}$$

où les valeurs propres λ_i sont deux à deux distinctes, et les multiplicités m_i sont dans $\mathbb{N}^*$, dans ~~une~~ toute base adaptée à $E = \bigoplus N_{\lambda_i}(u)$, u est représentée par la matrice diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} + R_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_r I_{m_r} + R_r \end{pmatrix}$$

où les matrices R_i sont nilpotentes.

Soit $\mathcal{B}_i$ base de N_{λ_i} $\quad \mathcal{B} = (\mathcal{B}_1 \dots \mathcal{B}_r)$

base de E

$\mathrm{Mat}(u_{\lambda_i}, \mathcal{B}_i) = (\lambda_i I_{m_i} + R_i)$

Car $u_{\lambda_i} - \lambda_i \mathrm{Id}_{N_{\lambda_i}}$ est nilpotente.