Pour me 26.1, 26.2, 26.4, 26.25

χ_u Π_u

Si P annulateur de u, $Sp(u) \subset \{$ racines de $P\}$

Lemme des noyaux

Si $P \wedge Q = 1$, $\mathrm{Ker}(PQ)(u) = \mathrm{Ker}\, P(u) \oplus \mathrm{Ker}\, Q(u)$

Caractérisation de diagonalisabilité

u diagonalisable $\Leftrightarrow$ $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$

$\Leftrightarrow$ χ_u scindé et $n = \sum \dim E_\lambda(u)$

$\Leftrightarrow$ χ_u scindé $m(\lambda) = \dim E_\lambda(u)$

$\Leftrightarrow$ Π_u scindé simple

$\Leftrightarrow$ $\exists P$ scindé simple annulateur de u

$\Leftrightarrow$ $\prod_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda)$ annulateur de u

4 Trigonalisabilité

4.1 Trigonalisabilité d'un endomorphisme en dimension finie

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est **trigonalisable** s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$ soit triangulaire supérieure.

Théorème.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$\begin{aligned} u \text{ est trigonalisable} &\iff \text{il existe un polynôme annulateur scindé} \\ &\iff \chi_u \text{ est scindé} \\ &\iff \pi_u \text{ est scindé} \end{aligned}$$

Preuve: $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$

$$\mathrm{Mat}(u,\mathcal{B}) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u(e_1) & u(e_2) & \cdots & u(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \ & & \\ & \ddots & \\ (0) & & \ \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array}$$

Triangulaire $\iff \begin{cases} u(e_1) \in \mathrm{Vect}(e_1) \\ u(e_2) \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2) \\ u(e_3) \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3) \\ \forall k \quad u(e_k) \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) \end{cases}$

Mq que u trigonalisable $\iff$ χ_u scindé

$\boxed{\Rightarrow}$ Si u diagonalisable $\exists\, \mathcal{B} = (e_1 \dots e_n)$ tq

$$\mathrm{Mat}(u,\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} = T$$

et $\chi_u = \chi_T = \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)$ car T triangulaire

$\boxed{\Leftarrow}$ Par récurrence sur $\dim E$.

- Si E est une droite vectorielle, c'est direct.
- Soit $n \geq 1$. On suppose que dans tout ev de dim n, si v est un endom dont le polynôme caractéristique est scindé, alors v est trigonalisable.

Soit E ev de dim $n+1$, $u \in \mathcal{L}(E)$ tq χ_u est scindé.

Soit λ racine de χ_u (existe car χ_u scindé) donc λ est une vp de u donc $\exists\, e_1 \in E$ non nul tq $u(e_1) = \lambda e_1$.

On complète (e_1) libre en

$$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_{n+1}) \text{ base de } E.$$

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} u(e_1) & u(e_2) & \dots & u(e_{n+1}) \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} \lambda & B \\ \hline 0 & \\ \vdots & A \\ 0 & \end{array}\right) & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{n+1} \end{array} \end{array}$$

~~On note v l'endom induit par u sur~~

$F = \mathrm{Vect}(e_2, .., e_{n+1})$ et ~~$A = \mathrm{Mat}(v, (e_2, .., e_{n+1}))$~~

Soit p projection sur F de direction $\mathrm{Vect}(e_1)$

$$\mathrm{Mat}(p, \mathcal{B}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & I_n & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

$$\mathrm{Mat}(p \circ u, \mathcal{B}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

On note v l'endomorphisme induit par $p \circ u$ sur F (car F stable par $p \circ u$)

et $A = \mathrm{Mat}(v, (e_2, \dots, e_{n+1}))$

$\chi_v = \chi_A \mid \chi_u$ car, par blocs,

$$\chi_u = (X - \lambda)\chi_A$$

donc χ_v est scindé.

Donc par H.R, v est trigonalisable :

$\exists (e'_2, \dots, e'_{n+1})$ base de F tq

$$\mathrm{Mat}(v, (e'_2, \dots, e'_{n+1})) = \begin{pmatrix} \lambda_2 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_{n+1} \end{pmatrix}$$

Notons $\mathcal{B}' = (e_1, e'_2, e'_3, \dots, e'_{n+1})$

base de $E = \mathrm{Vect}(e_1) \oplus F$

Mq que $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}')$ est triangulaire.

$$
\begin{array}{cc}
\begin{array}{cccc} u(e_1) & u(e'_2) & \dots & u(e'_{n+1}) \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
\lambda & & & \\
0 & & & \\
\vdots & & & \\
0 & & &
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_{n+1} \end{array}
\end{array}
$$

$\forall k \geq 2 \quad u(e'_k) \in E = \mathrm{Vect}(e_1) \oplus F$

donc $u(e'_k) = \alpha_k e_1 + p\big(u(e'_k)\big)$

$= \alpha_k e_1 + p \circ u(e'_k)$

$= \alpha_k e_1 + \underbrace{v(e'_k)}_{\in \mathrm{Vect}(e'_2, \dots, e'_k)}$

car $\mathrm{Mat}(v, (e'_2 \dots e'_{n+1}))$ triang.

$\in \mathrm{Vect}(e_1, e'_2, \dots, e'_k)$

donc $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}')$ est triangulaire.

• On conclut par récurrence.

Proposition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Si u est trigonalisable, i.e. si χ_u est scindé, alors la trace est la somme des valeurs propres (comptées avec multiplicité) et le déterminant est le produit des valeurs propres (comptées avec multiplicité) :

$$\operatorname{tr}(u) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} m(\lambda)\lambda \text{ et } \det(u) = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} \lambda^{m(\lambda)}$$

Si χ_u est scindé, $\exists \mathcal{B}$ base de E tq

M1 $\quad \operatorname{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ (0) & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

les λ_i répétés selon la multiplicité.

donc $\operatorname{tr}(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad \det(u) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

M2 On note $\chi_u = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{m_k}$

λ_k 2 à 2 distincts, $m_k \geq 1$

$\exists \mathcal{B}$ tq

$$\operatorname{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} \lambda_1 & & * \\ (0) & \ddots & \lambda_1 \end{matrix}}_{m_1} & * & * \\ & \underbrace{\begin{matrix} \lambda_2 & & * \\ (0) & \ddots & \lambda_2 \end{matrix}}_{m_2} & * \\ (0) & & \ddots \\ & & & \underbrace{\begin{matrix} \lambda_p & & * \\ (0) & \ddots & \lambda_p \end{matrix}}_{m_p} \end{pmatrix}$$

4.2 Trigonalisabilité d'une matrice carrée

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **trigonalisable** si et seulement si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure :

$$\exists T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ triangulaire supérieure}, \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\ A = PTP^{-1}$$

s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$ soit triangulaire supérieure.

Théorème.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$\begin{aligned} A \text{ est trigonalisable} &\iff \text{il existe un polynôme annulateur scindé} \\ &\iff \chi_A \text{ est scindé} \\ &\iff \pi_A \text{ est scindé} \end{aligned}$$

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A est trigonalisable, i.e. si χ_A est scindé, alors la trace est la somme des valeurs propres (comptées avec multiplicité) et le déterminant est le produit des valeurs propres (comptées avec multiplicité) :

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} m(\lambda)\lambda \text{ et } \det(A) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \lambda^{m(\lambda)}$$

Remarque: dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, toute matrice est trigonalisable.
(car tout polynôme est scindé)

Exemple: Exprimer en fonction de n le terme général de $(u_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} \cancel{u_0 = u_1 = u_2 = 1} \\ \forall n \quad u_{n+3} = 11u_{n+2} - 39u_{n+1} + 45u_n \end{cases}$$

(Écrire une suite récurrente linéaire d'ordre 1 dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$)

On note $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ 45u_n - 39u_{n+1} + 11u_{n+2} \end{pmatrix}$$

$$= AU_n \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 45 & -39 & 11 \end{pmatrix}$$

par réc, $\forall n$ $U_n = A^n . U_0$

<u>Réduisons</u> A (diagonalisons, ou trigonalisons)

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ -45 & 39 & X-11 \end{vmatrix} \qquad \text{dév } L_3$$

$$= -45 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ X & -1 \end{vmatrix} - 39 \begin{vmatrix} X & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + (X-1) \begin{vmatrix} X & -1 \\ 0 & X \end{vmatrix}$$

$$= X^3 - 11X^2 + 39X - 45$$

racines parmi les diviseurs de 45

$$= (X-3)(X^2 - 8X + 15)$$

$$= (X-3)^2(X-5)$$

si $\dim E_3(A) = 1$, A non diagonalisable

mais χ_A est scindé, donc A trigonalisable.

$$E_5(A) = \mathrm{Ker}(A - 5I_3)$$

$$= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 45 & -39 & 6 \end{pmatrix}$$

$C_1 + 5C_2 + 25C_3 = 0$

$$= \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$$E_3(A) = \mathrm{Ker}(A - 3I_3)$$

$$= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 45 & -39 & 8 \end{pmatrix} \text{ de dim } 1$$

$C_1 + 3C_2 + 9C_3 = 0$

$$= \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

A non diagonalisable.

<u>Indice</u> : Calculer $(A - 3I_3)^2$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 45 & -39 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 45 & -39 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 1 \\ 45 & -30 & 5 \\ 5\times 45 & 5\times(-30) & 5\times 5 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Ker}(A - 3I_3)^2$ de dim 2

contient $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

noté V_2

$$(A-3I_3)(V_2) \in \operatorname{Ker}(A-3I_3)$$

$\shortparallel$ colinéaire à $\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix}$

$$(A-3I_3)(V_2) = \begin{pmatrix}-3 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 1\\ 45 & -39 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\6\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix} \Leftarrow \text{ noté } V_1$$

On note $V_3 = \begin{pmatrix}1\\5\\25\end{pmatrix}$

- (V_1, V_2) base de $\operatorname{Ker}(A-3I_3)^2$

  V_3 base de $\operatorname{Ker}(A-5I_3)$

  $(X-3)^2 \wedge (X-5) = 1$

  par le lemme des noyaux

$$\operatorname{Ker}(A-3I_3)^2 \oplus \operatorname{Ker}(A-5I_3) = \operatorname{Ker}\left((X-3)^2(X-5)(A)\right)$$
$$= \operatorname{Ker}(\chi_A(A))$$
$$= \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$$

Donc (V_1, V_2, V_3) base de $\mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$

Soit $a : \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$

$$X \longmapsto AX$$

$$T = \mathrm{Mat}(a,(V_1,V_2,V_3)) = \begin{array}{cccc} a(V_1) & a(V_2) & a(V_3) & \\ \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 \end{array}\right) & & & \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{array} \end{array}$$

on a $AV_3 = 5V_3$

$AV_1 = 3V_1$

$(A-3I_3)V_2 = V_1$ donc $AV_2 = V_1 + 3V_2$

Avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 9 & 6 & 25 \end{pmatrix}$, $A = PTP^{-1}$

donc $A^n = P\,T^n\,P^{-1}$ par réc

<u>Calcul de T^n</u> $= \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{B^n} & 0 \\ & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5^n \end{array}\right)$ par blocs

où $B^n = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n$

$= (3I_2 + J)^n \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (3I_2)^{n-k} J^k \qquad J^2 = 0$

$3I_2$ et J commutent

$= 3^n I_2 + n3^{n-1} J + 0$

$$= \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

Ainsi $$T^n = \left(\begin{array}{cc|c} 3^n & n3^{n-1} & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5^n \end{array}\right)$$

Ouf !

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = U_n = P T^n P^{-1} U_0$$

$$= \left(V_1 \middle| V_2 \middle| V_3\right) \left(\begin{array}{cc|c} 3^n & n3^{n-1} & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5^n \end{array}\right) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c} 3^n V_1 & n3^{n-1} V_1 + 3^n V_2 & 5^n V_3 \end{array}\right) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha 3^n v_{11} + \beta n 3^{n-1} v_{11} + \beta 3^n v_{21} + \gamma 5^n v_{31} \\ * \\ * \end{pmatrix}$$

donc $u_n = \lambda 3^n + \mu n 3^{n-1} + \nu 5^n$ $\forall n$

$\boxed{26.35}$