Pour me 26.1, 26.2, 26.4, 26.25

$u \in \mathcal{L}(E)$

u diagonalisable $\iff \exists B$ tq $\mathrm{Mat}(u, B)$ diagonale

$\iff E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$

$\iff n = \sum \dim E_\lambda(u)$

$\iff \chi_u$ scindé et $\dim E_\lambda(u) = m(\lambda)$

$\iff \Pi_u$ scindé simple.

$\iff \exists P$ scindé simple annulateur de u

$\iff \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda)$ annulateur de u

Th de Cayley-Hamilton: χ_u est annulateur de u

Si χ_u scindé simple alors u diagonalisable.

Si P annulateur de u, $Sp(u) \subset \{$racines de $P\}$

Lemme des noyaux: Si $P \wedge Q = 1$

alors $\mathrm{Ker}(P(u)) \oplus \mathrm{Ker}(Q(u)) = \mathrm{Ker}(PQ(u))$

4 Trigonalisabilité

4.1 Trigonalisabilité d'un endomorphisme en dimension finie

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est **trigonalisable** s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}(u, \mathcal{B})$ soit triangulaire supérieure.

Théorème.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$\begin{aligned} u \text{ est trigonalisable} &\iff \text{il existe un polynôme annulateur scindé} \\ &\iff \chi_u \text{ est scindé} \\ &\iff \pi_u \text{ est scindé} \end{aligned}$$

$$\text{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u(e_1) & u(e_2) & \cdots & u(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ & (0) & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array}$$

la matrice est triangulaire supérieure

$\iff \forall k \quad u(e_k) \in \text{Vect}(e_1, .., e_k)$

et pas $(e_1 .. e_k .. e_n)$

Proposition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Si u est trigonalisable, i.e. si χ_u est scindé, alors la trace est la somme des valeurs propres (comptées avec multiplicité) et le déterminant est le produit des valeurs propres (comptées avec multiplicité) :

$$\operatorname{tr}(u) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} m(\lambda)\lambda \text{ et } \det(u) = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} \lambda^{m(\lambda)}$$

Si χ_u scindé u est trigonalisable donc $\exists \mathcal{B} = (e_1 \ldots e_n)$ base de E tq

$$\operatorname{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{tr}(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad \det(u) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

M2 Si $\chi_u = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{m_k}$

λ_k vp 2 à 2 distinctes,

m_k multiplicité

$$\exists \mathcal{B} \text{ tq } \operatorname{Mat}(u) = \begin{array}{cccc} \overbrace{\quad}^{m_1} & \overbrace{\quad}^{m_2} & & \overbrace{\quad}^{m_p} \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda_1 & * \\ (0) & \lambda_1 \end{matrix} & * & & * \\ & \begin{matrix} \lambda_2 & * \\ (0) & \lambda_2 \end{matrix} & & * \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \begin{matrix} \lambda_p & * \\ (0) & \lambda_p \end{matrix} \end{pmatrix}$$

4.2 Trigonalisabilité d'une matrice carrée

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **trigonalisable** si et seulement si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure :

$$\exists T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ triangulaire supérieure}, \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\ A = PTP^{-1}$$

s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$ soit triangulaire supérieure.

Théorème.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$\begin{aligned} A \text{ est trigonalisable } &\iff \text{il existe un polynôme annulateur scindé} \\ &\iff \chi_A \text{ est scindé} \\ &\iff \pi_A \text{ est scindé} \end{aligned}$$

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A est trigonalisable, i.e. si χ_A est scindé, alors la trace est la somme des valeurs propres (comptées avec multiplicité) et le déterminant est le produit des valeurs propres (comptées avec multiplicité) :

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} m(\lambda)\lambda \text{ et } \det(A) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \lambda^{m(\lambda)}$$

<u>Propriété</u> Dans $M_n(\mathbb{C})$, toute matrice est trigonalisable car son pol caractéristique est scindé.

$\boxed{26.20}$

(a) $$\chi_A = \begin{vmatrix} X+1 & -1 & 3 \\ 0 & X-2 & 1 \\ -1 & 0 & X-2 \end{vmatrix} \quad \text{dév } C_2$$

$$= (X+1)(X-2)^2 - 1(-1 - 3(X-2))$$

$$= (X+1)(X^2 - 4X + 4) + 3X - 5$$

$$= X^3 - 3X^2 + 3X - 1$$

$$= (X-1)^3 \qquad 1 \text{ vp triple.}$$

1 seule vp. Si A diag, $A = P(1 I_3)P^{-1}$

$= I_3$ absurde.

Donc A non diagonalisable.

(b) On note $B = A - I_3$

$$B^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\text{rg}\, B^0 = 3$

$\dim \operatorname{Ker} B^0 = 0$

$$A - I_3 = B^1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1 vp de A

$\text{rg}\, B^1 = 2$

$\dim \operatorname{Ker} B = 1$

$$B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$\text{rg}\, B^2 = 1$

$\dim \operatorname{Ker} B^2 = 2$

$B^3 = 0$ (Cayley-Hamilton) $\text{rg}\, B^3 = 0$

$\dim \operatorname{Ker} B^3 = 3$

Soit $X \notin \operatorname{Ker} B^2 = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

par ex : $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

on calcule : $BX = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad B^2X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Mque (B^2X, BX, X) base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$\boxed{M1}$ Soit λ, μ, ν tq $\lambda B^2 X + \mu BX + \nu X = 0$

donc, en multipliant par B^2

$$\underbrace{\lambda B^4 X + \mu B^3 X}_{=0} + \nu B^2 X = 0$$

$$\nu \underbrace{B^2 X}_{\neq 0} = 0$$

donc $\nu = 0$

puis $\underbrace{\lambda B^3 X}_{=0} + \mu \underbrace{B^2 X}_{\neq 0} = 0$

donc $\mu = 0$

puis $\lambda \underbrace{B^2 X}_{\neq 0} = 0$

donc $\lambda = 0$

$\boxed{R2}$ La famille (B^2X, BX, X) est échelonnée donc libre.

$\boxed{R3}$ $\det_{can}(B^2X, BX, X) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$= -1 \neq 0$

base de $\mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$

Notons : $\mathcal{B}$ = base canonique de $\mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$

$\mathcal{B}'$ = base (B^2X, BX, X)

$$f : \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & BX \end{array}$$

endom. canoniquement associé à B.

$$T = \mathrm{Mat}(b, \mathcal{B}') = \begin{array}{c} \begin{matrix} b(B^2X) & b(BX) & b(X) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} B^2X \\ BX \\ X \end{matrix}$$

$$B = \mathrm{Mat}(b, \mathcal{B})$$

$$= P\,T\,P^{-1} \quad \text{où} \quad P = \mathrm{Pass}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$$

$$= \begin{array}{c} \begin{matrix} B^2X & BX & X \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{matrix}$$

(c) $B = A - I_3$

donc $A = B + I_3$

$$= P\,T\,P^{-1} + I_3$$

$$= P\,(T + I_3)\,P^{-1}$$

$$= P \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

donc $P^{-1}AP$ est triangulaire

$\boxed{26.29}$ On note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ -2u_n - 5u_{n+1} - 4u_{n+2} \end{pmatrix}$$

$$= A X_n \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

donc par récurrence $X_n = A^n X_0$

• Calcul de A^n

• réduction de A (diagonalisation ou trigonalisation)

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ 2 & 5 & X+4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} X+1 & -1 & 0 \\ -X-1 & X & -1 \\ X+1 & 5 & X+4 \end{vmatrix} \qquad C_1 \leftarrow C_1 - C_2 + C_3$$

$$= (X+1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & X & -1 \\ 1 & 5 & X+4 \end{vmatrix}$$

$$= (X+1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & X-1 & -1 \\ 0 & 6 & X+4 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$= (X+1)\left((X-1)(X+4)+6\right)$$
$$= (X+1)(X^2+3X+2)$$
$$= (X+1)^2(X+2)$$

<u>Rmq</u> : en développant, on obtient

$$\chi_A(X) = X^3 + 4X^2 + 5X + 2$$

<u>Recherche des espaces propres :</u>

$$E_{-2}(A) = \mathrm{Ker}(A + 2I_3)$$
$$= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

de rang ≥ 2, < 3

$$C_1 - 2C_2 + 4C_3 = 0$$

$$= \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$E_{-1}(A) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} +1 & 1 & 0 \\ 0 & +1 & 1 \\ -2 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

rang ≥ 2, < 3

$$C_1 - C_2 + C_3$$

$$= \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\dim E_{-1}(A) = 1 < 2 = m(-1)$

donc A n'est pas diagonalisable.

$E_{-1}(A) = \operatorname{Ker}(A + I_3)$ de dim 1

$\cap$

Calculer $\operatorname{Ker}(A+I_3)^2$

$= \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ de dim 2 par le th du rang

de rang 1

Soit $V_2 \in \operatorname{Ker}(A+I_3)^2$ Par ex $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$V_1 = (A+I_3)V_2$ $\qquad V_3 \in E_{-2}(A)$

AV_1 ? $\qquad V_1, V_2$ libre ?

AV_1 sans calcul ? $\qquad (V_1, V_2, V_3)$ base de $\mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$?

Soit $a : \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$ canoniquement associée à A

$X \longmapsto AX$

$\operatorname{Mat}(a, \text{can}) = A$

$\operatorname{Mat}(a, (V_1, V_2, V_3))$?

On a posé $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\quad V_1 = (A+I_3)V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_{-1}(A)$

$(A+I_3)V_1 = (A+I_3)^2 V_2 = 0$ donc $AV_1 = -V_1$

Mque (V_1, V_2) libre dans $\mathrm{Ker}(A+I_3)^2$.

M1 $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ non colinéaires donc libre

M2 $\begin{cases} V_2 \in \mathrm{Ker}(A+I_3)^2 \quad V_2 \notin \mathrm{Ker}(A+I_3) \\ V_1 = (A+I_3)V_2 \end{cases}$

$x = V_2$ tq $f^2(x) = 0$
$f(x) \neq 0$
$(x, f(x))$ libre

Mque (V_1, V_2, V_3) base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

M1 classique M2 lemme des noyaux

M1 : On note $P = \mathrm{Mat}_{can}(V_1, V_2, V_3)$

$$= \left(V_1 \middle| V_2 \middle| V_3 \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det P = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$

dev C_2

$$= -(-5+4)$$
$$\neq 0$$

donc P inversible et $\mathcal{B}' = (V_1, V_2, V_3)$ base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Rmq : $\mathrm{Pass}(can \to \mathcal{B}') = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} V_1 & V_2 & V_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} \end{array} = P$

(12) $(X+1)^2$ et $(X+2)$ sont premiers entre eux

donc, par le lemme des noyaux :

$$\underbrace{\operatorname{Ker}(A+I_3)^2}_{N_{-1}(A)} \oplus \underbrace{\operatorname{Ker}(A+2I_3)}_{E_{-2}(A)} = \operatorname{Ker}\big(\underbrace{(A+I_3)^2(A+2I_3)}_{\chi_A(A)}\big)$$

il contient $E_{-1}(A)$

$\operatorname{Vect}(V_3)$

où $\chi_A = (X+1)^2(X+2)$

contient V_1, V_2 libre

de dim $= 2$

donc c'est $\operatorname{Vect}(V_1, V_2)$

$$= \operatorname{Ker}\left(0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}\right)$$

par le th de Cayley-Hamilton

$$= \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$$

Par concaténation de bases, (V_1, V_2, V_3) base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Alors $T = \operatorname{Mat}(a, \mathcal{B}') =$

$$\begin{array}{c c}
\begin{array}{ccc} a(V_1) & a(V_2) & a(V_3) \end{array} & \\
\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 \end{array}\right) & \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{array}
\end{array}$$

car $a(V_3) = AV_3 = -2V_3$ car $V_3 \in E_{-2}(A)$

$a(V_1) = AV_1 = -V_1$

$(A+I_3)V_2 = V_1$ donc $AV_2 = V_1 - V_2$

T est triangulaire supérieure, diagonale par blocs.

et on a : $A = P\,T\,P^{-1}$

donc par réc $A^n = P\,T^n\,P^{-1}$

<u>Calcul de T^n</u> : Notons $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

donc, par blocs, $T = \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & -2 \end{array}\right)$

$T^n = \left(\begin{array}{c|c} B^n & 0 \\ \hline 0 & (-2)^n \end{array}\right)$

<u>Calcul de B^n</u> :

Remarquons $B = -I_2 + J$ où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$J^2 = 0$

Comme I_2 et J commutent,

$$B^n = (-I_2 + J)^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-I_2)^{n-k} J^k \qquad \text{pour } n \geq 1$$
$$= 1 \cdot (-1)^n I_2 + n(-1)^{n-1} J$$

valable pour $n=0$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^n & n(-1)^{n-1} \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

Ainsi $$A^n = P \begin{pmatrix} (-1)^n & n(-1)^{n-1} & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

Ouf !

Revenons à notre pb initial :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = X_n = A^n X_0$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & n(-1)^{n-1} & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \underbrace{P^{-1} X_0}_{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(-1)^n + \beta n (-1)^{n-1} \\ \beta(-1)^n \\ \gamma(-2)^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\alpha+\beta)(-1)^n + \beta n (-1)^n + \gamma(-2)^n \\ * \\ * \end{pmatrix}$$

donc $\exists\, \lambda, \mu, \nu$ tq $\forall n$

$$u_n = \lambda(-1)^n + \mu n (-1)^{n-1} + \nu(-2)^n$$

on détermine λ, μ, ν à l'aide de u_0, u_1, u_2