3 Polynômes annulateurs et réduction

3.1 Une CNS de diagonalisabilité

Théorème.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$\begin{aligned} u \text{ est diagonalisable} &\iff \text{il existe un polynôme annulateur de } u \text{ scindé à racines simples} \\ &\iff \pi_u \text{ est scindé à racines simples} \end{aligned}$$

Proposition. On peut donc aussi écrire :

$$u \text{ est diagonalisable} \iff \pi_u = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$$

Exemple. Un projecteur, une symétrie sont diagonalisables.

↳ $p^2 - p = 0$ donc $X(X-1)$ annulateur de p scindé simple

donc p diagonalisable.

Preuve : Mq u diag $\Rightarrow \exists P$ scindé simple tq $P(u) = 0$

On suppose u diagonalisable.

donc $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} \underbrace{\mathrm{Ker}(u - \lambda Id_E)}_{E_\lambda(u)}$

On note $P = \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda) \in \mathbb{K}[X]$

il est scindé à racines simples

Les $(X-\lambda)$ sont premiers entre eux, donc par le lemme

des noyaux $\mathrm{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} \mathrm{Ker}(X-\lambda)(u)$

$= \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} \mathrm{Ker}(u - \lambda Id_E)$

$= E$ par hypothèse

donc $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

- <u>Mque S'il existe P scindé simple annulateur de u</u>

  <u>alors Π_u est scindé simple.</u>

  Soit P scindé simple tq $P(u) = 0$

  Donc, par déf, $\Pi_u \mid P = \prod_{\mu \in R} (X - \mu)$

  donc Π_u est scindé simple

- <u>Mque Π_u scindé simple $\Rightarrow$ u diagonalisable</u>

  On suppose Π_u est scindé simple.

  $$\Pi_u = \prod_{\lambda \in S} (X - \lambda)$$

  Par le lemme des noyaux :

  $$E = \operatorname{Ker} \Pi_u(u) = \bigoplus_{\lambda \in S} \operatorname{Ker} (X - \lambda)(u)$$

  $$= \bigoplus_{\lambda \in S} \operatorname{Ker} (u - \lambda \mathrm{Id}_E)$$

  donc u diagonalisable

  (Peut être que certains $\operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ sont $\{0_E\}$)

  (S = ens des racines de Π_u, peut être $\neq Sp(u)$)

<u>Remarque:</u> $S = Sp(u)$?

$\hookrightarrow$ plus tard.

3.2 Sous-espaces stables

Proposition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E. On suppose que F est stable par u, et on note u_F l'endomorphisme induit par u sur F. Alors :

$$\chi_{u_F} \mid \chi_u \quad \text{et} \quad \pi_{u_F} \mid \pi_u$$

Preuve : • F stable par u

donc $u_F : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}$ est bien définie.

• $\chi_{u_F} \mid \chi_u$ a déjà été vu

(écrire matrice de u par blocs dans une base adaptée à F)

• $\forall x \in F$, avec $\pi_u = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$

$$\pi_u(u_F)(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k u_F^k(x)$$
$$= \sum_{k=0}^{d} a_k u^k(x)$$
$$= \pi_u(u)(x)$$
$$= 0_{\mathcal{L}(E)}(x)$$
$$= 0$$

donc π_u est annulateur de u_F.

donc par déf de pol. minimal de u_F,

$$\pi_{u_F} \mid \pi_u$$

Proposition. Avec les notations précédentes, si u est diagonalisable, alors u_F est diagonalisable.

u diag donc Π_u scindé simple

or $\Pi_{u_F} \mid \Pi_u$

donc Π_{u_F} scindé simple

donc u_F diagonalisable.

Diagonalisation simultanée

24.5

Dans une espace vectoriel E de dimension finie, on considère deux endomorphismes u et v diagonalisables tels que $u \circ v = v \circ u$.

(a) Montrer que les sous-espaces propres de v sont stables par u.

(b) Montrer que l'endomorphisme induit de u à un sous-espace propre de v est diagonalisable.

(c) Montrer qu'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u et v.

(a) c'est une prop du cours

(b) Soit λ vp de v, $E_\lambda(v)$ stable par u

donc on peut définir $u_\lambda : \begin{array}{rcl} E_\lambda(v) & \longrightarrow & E_\lambda(v) \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}$

endom. induit.

u diagonalisable donc u_λ aussi

(c) On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les vp de v.

u_{λ_k} est diagonalisable donc $\exists\, (x_1^k, \dots, x_{n_k}^k) = \mathcal{B}_k$

base de $E_{\lambda_k}(v)$ formée de vecteurs propres

de u_{λ_k}.

Pour $x \in \mathcal{B}_k$,

$u(x) = u_{\lambda_k}(x) = \mu\ x$ car x vecteur propre de u_{λ_k}

$v(x) = \lambda_k\ x$ car $x \in E_{\lambda_k}(v)$

On note $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$

$\mathcal{B}$ base de E car $E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}(v)$ (v diag)

$$\mathrm{Mat}(v, \mathcal{B}) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} v(\mathcal{B}_1) & v(\mathcal{B}_2) & v(\mathcal{B}_p) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & A_2 & \\ (0) & & A_p \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{B}_2 \\ \mathcal{B}_p \end{array} \end{array}$$

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} u(\mathcal{B}_1) & u(\mathcal{B}_2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} B_1 & & (0) \\ & B_2 & \\ (0) & & B_p \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{B}_2 \\ \mathcal{B}_p \end{array} \end{array}$$

Matrices diag par blocs car $E_{\lambda_k}(v)$ stable par u et par v

$A_k = \mathrm{Mat}(v_k, \mathcal{B}_k)$ $\quad$ v_k endom induit sur $E_{\lambda_k}(v)$

$= \lambda_k\, \mathrm{Id}$ diagonale

$B_k = \mathrm{Mat}(u_k, \mathcal{B}_k)$

$$= \begin{pmatrix} \mu_1^k & & & (0) \\ & \mu_2^k & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \mu_{n_k}^k \end{pmatrix} \quad \text{diagonale}$$

3.3 Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème de Cayley-Hamilton.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors χ_u est annulateur de u.

Corollaire. Si E est de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$:

- $\pi_u \mid \chi_u$ et π_u et χ_u ont les mêmes racines.
- $\deg(\pi_u) \leqslant n$

Proposition : χ_u et π_u ont les mêmes racines

Preuve :

- $\pi_u \mid \chi_u$

  donc $\{\text{racines de } \pi_u\} \subset \{\text{racines de } \chi_u\}$

- π_u est annulateur de u

  Soit λ racine de χ_u, λ est vp de u

  donc $\exists x \in E$, $x \neq 0$ tq $u(x) = \lambda x$.

  On note $\pi_u = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$

  $$0 = \pi_u(u)(x)$$
  $$= \sum_{k=0}^{d} a_k u^k(x)$$
  $$= \left(\sum_{k=0}^{d} \left(a_k \lambda^k\right) x\right)$$
  $$= \pi_u(\lambda) . x$$

  or $x \neq 0$ donc $\pi_u(\lambda) = 0$

  ie $\lambda \in \{\text{racines de } \pi_u\}$.

Proposition : Si P est annulateur de u

$\mathrm{Sp}(u) \subset \{\text{racines de } P\}$

3.4 Traduction matricielle des résultats précédents

Théorème.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$\begin{aligned} A \text{ est diagonalisable} &\iff \text{il existe un polynôme annulateur de } A \text{ scindé à racines simples} \\ &\iff \pi_A \text{ est scindé à racines simples} \\ &\iff \pi_A = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (X - \lambda) \end{aligned}$$

Exemple. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^q = I_n$ pour un $q \in \mathbb{N}^*$. Justifier que A est diagonalisable.

Théorème de Cayley-Hamilton.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors χ_A est annulateur de A.

Corollaire.

- $\pi_A \mid \chi_A$
- $\deg(\pi_A) \leqslant n$

Pendant les vacances.

Exercices à rédiger au choix 24.29 24.30

25.10 25.11

pour le 28 oct 26.21 26.22

Mardi 5 novembre MPI* $7^h45 - 9^h35$

MPI $9^h50 - 11^h40$

Samedi 9 novembre : cours de math $7^h45 - 11^h40$