Pour ve : 25.13, 26.3, 26.19

$(\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot)$

$(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, \cdot)$

# 2 Polynôme d'une matrice

## 2.1 Définition

**Définition.** Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P = p_d X^d + \cdots + p_1 X + p_0 X^0 \in \mathbb{K}[X]$, on définit le **polynôme de la matrice** $A$ :

$$P(A) = p_d A^d + \cdots + p_1 A + p_0 I_n$$

$A^0$

C'est une matrice carrée.
On note $\mathbb{K}[A]$ l'ensemble des polynômes de la matrice $A$.
On dit qu'une matrice $B$ est un **polynôme de la matrice** $A$ lorsque $B \in \mathbb{K}[A]$, i.e. lorsqu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $B = P(A)$.

**Remarque.** *$A^k$ désigne $\underbrace{A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}}$.*
*$P(A)$ n'est pas de la fonction polynomiale associée à $P$ évaluée en $A$.*

## 2.2 Morphisme d'algèbres $P \mapsto P(A)$

**Théorème.**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note :

$$\begin{array}{rcccl} \phi_A & : & \mathbb{K}[X] & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & & P & \mapsto & P(A) \end{array}$$

- $\phi_A$ est un morphisme d'algèbres
- $\operatorname{Im} \phi_A = \mathbb{K}[A]$
- $\operatorname{Ker} \phi_A$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$

↘ cf règles de calcul

$$\phi_A(P \times Q) = \phi_A(P) \times \phi_A(Q)$$

ie $(PQ)(A) = P(A) \times Q(A)$

**Proposition.**

$$\begin{aligned}\mathbb{K}[A] &= \{P(A),\ P \in \mathbb{K}[X]\}\\ &= \operatorname{Vect}\left((A^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)\end{aligned}$$

$\mathbb{K}[A]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

**Règles de calcul.** Pour $P, Q$ polynômes, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ :

$$(\lambda P + \mu Q)(A) = \lambda P(A) + \mu Q(A)$$

$$(PQ)(A) = P(A)\cancel{\circ}Q(A)$$

$P(A)$ et $Q(A)$ commutent

$$1(A) = I_n$$

Si $A$ est triangulaire, les coefficients diagonaux de $P(A)$ sont connus :

$$\text{Lorsque } A = \begin{pmatrix}\lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}, alors P(A) = \begin{pmatrix}P(\lambda_1) & * & \dots & * \\ 0 & P(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & P(\lambda_n)\end{pmatrix}$$

1er cas : $P = X^k$

on a $X^k(A) = A^k$

$$= \begin{pmatrix}\lambda_1^k & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n^k\end{pmatrix} \quad \text{par récurrence}$$

2e cas : $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$

alors

$$P(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \begin{pmatrix}\lambda_1^k & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n^k\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda_1^k & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda_n^k\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}P(\lambda_1) & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & P(\lambda_n)\end{pmatrix}$$

Rmq : Si $A$ diagonale, $P(A) = \begin{pmatrix}P(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & P(\lambda_n)\end{pmatrix}$

## 2.3 Polynôme minimal d'une matrice carrée

**Définition.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le morphisme :

$$\begin{array}{rcl} \phi_A : \mathbb{K}[X] & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ P & \mapsto & P(A) \end{array}$$

n'est pas injectif. $\operatorname{Ker}\phi_A$ est un idéal non nul de $(\mathbb{K}[X], +, \times)$, appelé **idéal des polynômes annulateurs de $A$**. Il existe un unique polynôme unitaire, noté $\pi_A$ et appelé **polynôme minimal de $A$**, tel que :

$$\operatorname{Ker}\phi_A = (\pi_A) = \{\pi_A Q,\ Q \in \mathbb{K}[X]\}$$

**Remarque.** *On peut aussi trouver la notation $\mu_A$ pour le polynôme minimal de $A$.*

**Proposition.** Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ :

$$Q(A) = 0 \iff \pi_A \mid Q$$

$\pi_A$ est le polynôme unitaire de plus petit degré qui annule $u$.

Preuve : comme en §1.

**Exemple.** Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, déterminer le polynôme minimal de :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

- Calcul des puissances de $A$.

$\boxed{M1}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow k = C_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} k-1$$

$$\text{donc } A^2 = A \left( 0 \middle| E_1 \middle| \dots \middle| E_{n-1} \right)$$

$$= \left( A0 \,\middle|\, AE_1 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, AE_{n-1} \right)$$

$$= \left( 0 \,\middle|\, 0 \,\middle|\, E_1 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, E_{n-2} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & (0) & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

plus généralement par récurrence

$$A^k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \overset{\overset{k+1}{\downarrow}}{1} & (0) \\ & \ddots & & \ddots & 1 \\ & & \ddots & & 0 \\ & (0) & & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \forall k \in [\![0, .. n-1]\!]$$

donc $$A^{n-1} = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & (0) & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$A^n = (0)$$

<u>Donc</u> $X^n$ est annulateur de $A$.

(c'est un multiple de $\pi_A$)

On cherche $\Pi_A$ ie $\left|\begin{array}{l} \text{un diviseur de } X^n \\ \text{annulateur de } A \\ \text{de degré minimal} \end{array}\right.$

or $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $X^k$ n'est pas annulateur de $A$.

donc $\underline{\Pi_A = X^n}$

**2e méthode.** Il n'y a pas de pol annulateur (non nul) de degré $\leq n-1$, car la famille $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1})$ échelonnée donc libre donc n'est pas annulée par une CL non triviale.

## 3e point de vue

$$A = \begin{array}{ccccc} u(e_1) & u(e_2) & \cdots & u(e_n) & \\ 0 & 1 & & (0) & e_1 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & (0) & & 1 & e_{n-1} \\ & & & 0 & e_n \end{array}$$

$u$ canoniquement associé à $A$ est tq

$$\left\{\begin{array}{l} u(e_1) = 0 \\ \forall j \in [\![2, n]\!], \quad u(e_j) = e_{j-1} \end{array}\right.$$

donc $\left| \begin{array}{ll} u^2(e_j) = u(e_{j-1}) = e_{j-2} & \forall j \geq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$

$$u^k(e_j) = \begin{cases} e_{j-k} & \forall j \geq k+1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

<u>Remarque:</u>

$$T = \begin{array}{ccccc} u(e_1) & u(e_2) & - - - & u(e_n) & \\ \boxed{\lambda_1} & & & & e_1 \\ 0 & \lambda_2 & & * & e_2 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \\ \vdots & (0) & 0 & & e_{n-1} \\ 0 & 0 & \vdots & \lambda_n & e_n \end{array}$$

$\Bigg|$ Vect$(e_1)$ stable par $u$

Vect$(e_1, e_2)$ stable par $u$

$\vdots$

Vect$(e_1 \ldots e_k)$ stable par $u$ $\forall k$

## 2.4 Base de $\mathbb{K}[A]$

**Théorème.**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\pi_A$ son polynôme mininmal, et on note $d = \deg(\pi_A)$. Alors $(A^k)_{0 \leqslant k \leqslant d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[A]$.

**Remarque.**

- $\dim \mathbb{K}[A] = \deg \pi_A$.
- $\phi_A \ : \ P \mapsto P(A)$ *induit dans le cas du théorème un isomorphisme entre les espaces vectoriels* $(\mathbb{K}_d[X], +, \cdot)$ *et* $(\mathbb{K}[A], +, \cdot)$.

les polynômes de A commutent entre eux.

## 3 Lien entre les deux notions

**Proposition.** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$, $\mathcal{B}$ une base de $E$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X],\ \mathrm{Mat}(P(u), \mathcal{B}) = P\big(\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})\big)$$

Preuve: $\mathcal{B}$ fixée.

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{K}) \\ & u & \longmapsto & \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) \end{array}$$

$\psi$ est un isomorphisme d'algèbre

en part $\mathrm{Mat}(u^k) = \mathrm{Mat}(u)^k$ par réc

$$\mathrm{Mat}(\lambda u + \mu v) = \lambda \mathrm{Mat}(u) + \mu \mathrm{Mat}(v)$$

et donc pour les CL de puissances de $u$

$$\mathrm{Mat}\left(\sum a_k u^k\right) = \sum a_k \mathrm{Mat}(u)^k$$

# Réduction des endomorphismes et des matrices

## 1 Polynômes annulateurs et valeurs propres

### 1.1 Cas des endomorphismes

**Proposition.** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $x \in E$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.

**Remarque.** *Rappelons que $P(u)$ désigne un endomorphisme, que l'on évalue en $x$. Ça n'aurait aucun sens de chercher à évaluer en $P$ le vecteur $u(x)$.*

Si $P = X^2$

$P(u) = u^2 = u \circ u$

$P(u)(x) = u \circ u\,(x)$

$= u(\lambda x) \quad = \lambda\, u(x)$

$= \lambda . \lambda x$

$= \lambda^2 x$

Par récurrence : $X^k (u)(x) = u^k(x)$

$= \lambda^k (x)$

Donc pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$

$$P(u)(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(a_k u^k(x)\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(a_k \lambda^k x\right) = \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k\right)}_{P(\lambda)} x$$

**Proposition.** Si $P$ est annulateur de $u \in \mathcal{L}(E)$, alors toute valeur propre de $u$ est racine de $P$.

**Proposition.** Si $E$ est de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, alors les valeurs propres de $u$ sont les racines du polynôme minimal $\pi_u$.

**Corollaire.** Si $E$ est de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, alors les polynôme caractéristique $\chi_u$ et le polynôme minimal $\pi_u$ ont les mêmes racines.

**Remarque.** *En résumé :*

- *Les valeurs propres sont les racines du polynôme minimal*
- *Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique*
- *Si $P$ est annulateur de $u$, les valeurs propres sont parmi les racines de $P$*

Soit $P$ annulateur de $u$.

les vp de $u$ sont des racines de $P$

ie $\quad Sp(u) \subset \{\text{racines de } P\}$

Si on connaît $P$ annulateur de $u$, on a des "candidats" vp de $u$.

Preuve: Soit $\lambda$ vp de $u$ et $P$ annulateur de $u$

Soit $x$ vecteur propre associé.

$0_E = P(u)(x) = P(\lambda)x$ avec $x \neq 0_E$

donc $P(\lambda) = 0$

**Proposition.** Si $E$ est de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, alors les valeurs propres de $u$ sont les racines du polynôme minimal $\pi_u$.

**Corollaire.** Si $E$ est de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, alors les polynôme caractéristique $\chi_u$ et le polynôme minimal $\pi_u$ ont les mêmes racines.

**Remarque.** *En résumé :*

- *Les valeurs propres sont les racines du polynôme minimal*
- *Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique*
- *Si $P$ est annulateur de $u$, les valeurs propres sont parmi les racines de $P$*

$$\underset{\{\text{racines de } \chi_u\}}{\underset{\shortparallel}{Sp(u)}} = \{\text{racines de } \pi_u\}$$

Preuve: $\boxed{\subset}$ Soit $\lambda$ vp de $u$,

Comme $\pi_u$ est annulateur de $u$,

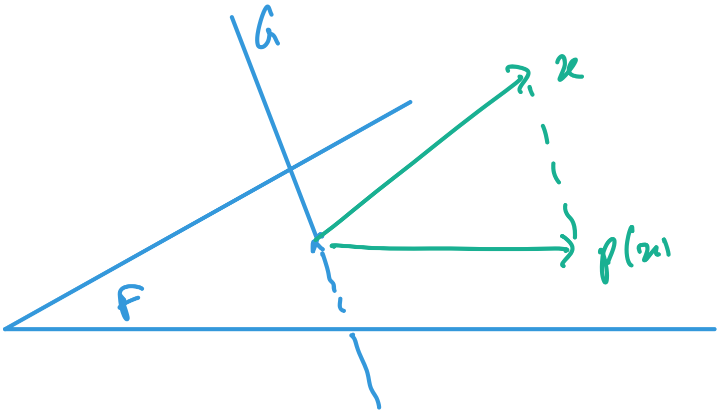
$\lambda \in \{\text{racines de } \pi_u\}$

$\boxed{\supset}$ On verra le th de Cayley-Hamilton qui indique $\chi_u$ est annulateur de $u$.

donc $\pi_u \mid \chi_u$

donc $\{\text{racines de } \pi_u\} \subset \underset{Sp(u)}{\underset{\shortparallel}{\{\text{racines de } \chi_u\}}}$

**Exemple.** On considère un projecteur $p$ d'un espace vectoriel de dimension finie. Calculer son polynôme caractéristique $\chi_p$, son polynôme minimal $\pi_p$ et donner un autre polynôme, annulateur de $p$.



Soit $p$ projecteur de rang $r \in [\![1, n-1]\!]$.

Soit $E$ ev de dim $n$, $F \oplus G = E$

$\dim F = r$, $\dim E = n$

Soit $\mathcal{B}$ adaptée à $F \oplus G$

(ie $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)$ )

$$\mathrm{Mat}(p, \mathcal{B}) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\chi_p = \det \left(\begin{array}{c|c} XI_r - I_r & 0 \\ \hline 0 & XI_{n-r} \end{array}\right)$$

$$= \det(XI_r - I_r)\det(XI_{n-r})$$

$$= (X-1)^r X^{n-r}$$

On a déja vu que $\pi_p = X(X-1)$
(car $p \circ p = p$)

Par ex, $X(X-1)(X-2)$ est annulateur de $p$.

## 1.2 Cas des matrices

**Proposition.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Si $AX = \lambda A$, alors $P(A)X = P(\lambda)X$.

**Proposition.** Si $P$ est annulateur de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors toute valeur propre de $A$ est racine de $P$.

**Proposition.** Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors les valeurs propres de $A$ sont les racines du polynôme minimal $\pi_A$.

**Corollaire.** Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors les polynôme caractéristique $\chi_A$ et le polynôme minimal $\pi_A$ ont les mêmes racines.

**Remarque.** *En résumé :*

- *Les valeurs propres sont les racines du polynôme minimal*
- *Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique*
- *Si $P$ est annulateur de $A$, les valeurs propres sont parmi les racines de $P$*

**Exemple.** On considère la matrice $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ remplie de 1. Calculer son polynôme caractéristique $\chi_J$, son polynôme minimal $\pi_J$ et donner un autre polynôme, annulateur de $J$.

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- Polynôme minimal

On cherche un polynôme annulateur de J i.e. une CL nulles des puissances de J

$$J^2 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ n & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix}$$

$$= nJ$$

Donc $P = X^2 - nX = X(X-n)$ est annulateur de $J$.

Or $J \neq 0$ et $J - nI_n \neq 0$ donc

$$\boxed{\pi_J = X(X-n)}$$

- Polynôme caractéristique

$$\chi_J = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & X-1 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & X-1 \end{vmatrix}$$

$C_1 \leftarrow C_1 + \dots + C_n$

$$= \begin{vmatrix} X-n & -1 & & -1 \\ X-n & X-1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ X-n & -1 & & X-1 \end{vmatrix}$$

$$= (X-n) \begin{vmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & X-1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & -1 & \ddots & -1 \\ 1 & -1 & -1 & X-1 \end{vmatrix}$$

$L_k \leftarrow L_k - L_1 \quad \forall k \geq 2$

$$= (X-n) \begin{vmatrix} 1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 \\ 0 & X & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & X & 0 \cdots & 0 \\ & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & X \end{vmatrix}$$

$$= (X-n)\, X^{n-1}$$

- Autre pol annulateur : $\overbrace{\boxed{(X-n)X}}^{\Pi_J}\overbrace{(X+4)}^{Q}$

**Exemple.** Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$\pi_A = X^n$

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ 0 & & & X \end{vmatrix}$$

$= X^n$

0 seule vp. Si $A$ diag, $A = P \begin{pmatrix} 0 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$

$= 0$

# 2 Lemme de décomposition des noyaux

## 2.1 Le théorème

**Lemme de décomposition des noyaux.**

Soit $P_1, P_2$ deux polynômes, que l'on suppose premiers entre eux ($P_1 \wedge P_2 = 1$). On note $P = P_1P_2$. Alors, pour tout endomorphisme $u$ :

$$\operatorname{Ker}\left(P(u)\right) = \operatorname{Ker}\left(P_1(u)\right) \oplus \operatorname{Ker}\left(P_2(u)\right)$$

**Remarque.** *On peut ajouter que les projecteurs associés à cette décomposition sont des polynômes en $u$.*

Chouette ! Lorsque $P = P_1P_2$ est annulateur de $u$,

on écrit $E = \operatorname{Ker}(P_1(u)) \oplus \operatorname{Ker}(P_2(u))$

Preuve:

- $P_1 \wedge P_2 = 1$ donc $\exists\, U, V \in \mathbb{K}[X]$ tq

$$UP_1 + VP_2 = 1$$

donc $(UP_1 + VP_2)(u) = Id_E$

ie $\forall x \in E$

$$\big(U(u) \circ P_1(u)\big)(x) + \big(V(u) \circ P_2(u)\big)(x) = x$$

- Mq la somme est directe.

Soit $x \in \operatorname{Ker}(P_1(u)) \cap \operatorname{Ker}(P_2(u))$

Alors $x = U(u)\big[\underbrace{P_1(u)(x)}_{=0}\big] + V(u)\big[\underbrace{P_2(u)(x)}_{=0}\big]$

$= 0$

- Mq $\operatorname{Ker}(P_1P_2(u)) \subset \operatorname{Ker}(P_1(u)) + \operatorname{Ker}(P_2(u))$

Soit $x \in \operatorname{Ker}(P_1P_2(u))$

ie $P_1P_2(u)(x) = 0$

On a $x = \underbrace{\overbrace{P_1(u)\circ U(u)}^{\substack{(P_1\times U)(u) \\ \mathbb{K}[u] \text{ commutative}}}(x)}_{x_2} + \underbrace{P_2(u)\circ V(u)(x)}_{x_1}$

Mqe $x_1 \in \mathrm{Ker}(P_1(u))$

$$P_1(u)(x_1) = P_1(u)\Big(P_2(u)\circ V(u)\;(x)\Big)$$
$$= (P_1\times P_2)(u)\Big(V(u)(x)\Big)$$
$$= V(u)\Big(\underbrace{(P_1\times P_2)(u)\,(x)}_{=0}\Big)$$
$$= 0$$

De même, $x_2 \in \mathrm{Ker}(P_2(u))$

- Mqe $\mathrm{Ker}(P_1(u)) + \mathrm{Ker}(P_2(u)) \subset \mathrm{Ker}((P_1P_2)(u))$

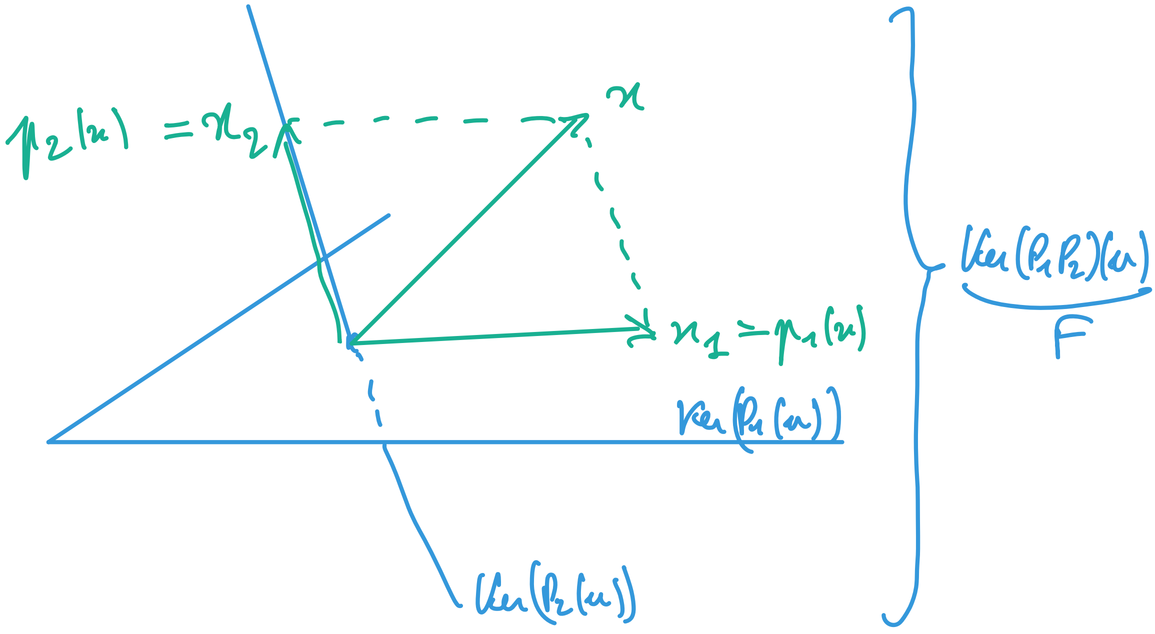
Soit $x = x_1 + x_2 \in \mathrm{Ker}(P_1(u)) + \mathrm{Ker}(P_2(u))$

On calcule

$$(P_1P_2)(u)\,(x)$$
$$= P_1(u)\circ P_2(u)\big(x_1 + x_2\big)$$
$$= P_2(u)\Big(\underbrace{P_1(u)(x_1)}_{=0}\Big) + P_1(u)\Big(\underbrace{P_2(u)(x_2)}_{=0}\Big)$$
$$= 0$$

Ccl : $\mathrm{Ker}(P_1P_2(u)) = \mathrm{Ker}(P_1(u)) \oplus \mathrm{Ker}(P_2(u))$

(Bézout ! donne la décomp)



$p_1 + p_2 = Id_F$ $\quad$ $p_1$ proj sur $\ker P_1(u)$ de dir $\ker P_2(u)$

On a vu :

$$p_1(x) = P_2(u) \circ V(u)\ (x)$$

$$p_2(x) = P_1(u) \circ U(u)\ (x)$$

donc $p_1, p_2 \in \mathbb{K}[u]$

**Corollaire.** Soit $P_1, \dots, P_r$ des polynômes deux à deux premiers entre eux. On note $P = P_1 \dots P_r$. Alors, pour tout endomorphisme $u$ :

$$\operatorname{Ker}\big(P(u)\big) = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}\big(P_i(u)\big)$$

**Corollaire.** Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur non nul de $u \in \mathcal{L}(E)$. On note :

$$P = \lambda P_1^{m_1} \dots P_r^{m_r}$$

sa décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{K}$. Alors :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}\big(P_i^{m_i}(u)\big)$$

Preuve par récurrence sur $r$.

Si $P_1 \dots P_r$ premiers entre eux

alors : $(P_1 \times \dots \times P_{r-1})$ et $P_r$ sont premiers entre eux.

Soit $A, B, C$ 3 polynômes premiers entre eux.

$A$ et $B$ premiers entre eux donc

$$\exists\, U, V \text{ tq } AU + BV = 1$$

donc
$$\underbrace{AC}U + \underbrace{BC}V = C$$

Si $P$ divise $A$ et $BC$

alors $P$ divise $C$ et $A$ donc $P = 1$

donc $A \wedge BC = 1$

## 2.2 Exemple d'utilisation

**Exemple.** On s'intéresse à l'équation différentielle :

$$y^{(3)} + 4y'' + 4y' + 3y = 0 \qquad (E)$$

où $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction inconnue.

1. Montrer que si $\phi$ est solution de $(E)$, alors $\phi$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. On considère $u : f \mapsto f'$ endomorphisme de $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Écrire l'ensemble $S$ des solutions de $(E)$ comme $\operatorname{Ker}\big(P(u)\big)$, où $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme que l'on précisera.
3. Décomposer $P$ en produit de facteurs irréductibles.
4. En déduire la résolution de $E$ par la résolution de deux équations différentielles d'ordre $< 3$.