Pour vei : 24.2

24.10

24.18

Exemple. Déterminer les valeurs propres de :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\chi_C(X) = \det(XI_3 - C)$$

$$= \begin{vmatrix} X-1 & -1 & -1 \\ 0 & X-2 & -2 \\ -1 & 1 & X-3 \end{vmatrix} \qquad C_1 \leftarrow C_1 + C_2$$

$$= \begin{vmatrix} X-2 & -1 & -1 \\ X-2 & X-2 & -2 \\ 0 & 1 & X-3 \end{vmatrix}$$

$$= (X-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & X-2 & -2 \\ 0 & 1 & X-3 \end{vmatrix} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$= (X-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & X-1 & -1 \\ 0 & 1 & X-3 \end{vmatrix} \qquad \text{dév } C_1$$

$$= (X-2)\, 1 .\, (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} X-1 & -1 \\ 1 & X-3 \end{vmatrix}$$

$$= (X-2)(X^2 - 4X + 4)$$

$$= (X-2)^3$$

$\mathrm{Sp}(C) = \{2\}$ 2 est la seule vp de C.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_D(X) = \begin{vmatrix} X-2 & 0 & 0 \\ 3 & X+1 & -3 \\ -3 & -3 & X+1 \end{vmatrix}$$

dev L_1

$$= (X-2)\left[(X+1)^2 - 3^2\right]$$

$$= (X-2)(X-2)(X+4)$$

$$= (X-2)^2(X+4)$$

$$Sp(D) = \{2, -4\}$$

2 vp double.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\chi_E(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -4 & -2 \\ 0 & X+3 & 2 \\ 0 & -4 & X-3 \end{vmatrix}$$

dév C_1

$$= (X-1)(X^2-1)$$

$$= (X-1)^2(X+1)$$

$$Sp(E) = \{-1, 1\}$$

1 vp double.

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

déterminant de matrice "circulante"

$\longrightarrow$ somme des colonnes.

même coeff sur chq lignes, permutés

$$\chi_F(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ -1 & 0 & X \end{vmatrix}$$

$C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$

$$= \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 0 \\ X-1 & X & -1 \\ X-1 & 0 & X \end{vmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$= (X-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & X+1 & -1 \\ 0 & 1 & X \end{vmatrix}$$

dév C_1

$$= (X-1)\underbrace{(X^2 + X + 1)}_{\text{irréductible dans } \mathbb{R}[X]} = (X^3 - 1)$$

<u>résultat 1</u> donc $Sp_{\mathbb{R}}(F) = \{1\}$

vp simple

χ_F non scindé sur $\mathbb{R}$

<u>résultat 2</u> On considère $F \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$

$e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$$\chi_F(X) = (X-1)(X-j)(X-j^2)$$

$$Sp_{\mathbb{C}}(F) = \{1, j, j^2\}$$

Proposition. Soit A diagonale ou triangulaire :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \spadesuit & \cdots & \cdots & \spadesuit \\ 0 & a_{22} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \spadesuit \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\chi_A = \prod_{i=1}^{n} (X - a_{ii})$$

Corollaire. Les valeurs propres d'une matrice diagonale, d'une matrice triangulaire, sont les coefficients diagonaux de la matrice.

4.2 Multiplicité, propriétés

Définition. On dit que λ est valeur propre de A **de multiplicité** m lorsque λ est racine de multiplicité m de χ_A.

Proposition. Un matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet au plus n valeurs propres, comptées avec multiplicité.

preuve :

χ_A est de degré n donc

admet au plus n racines (avec multiplicité)

Proposition. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le nombre de valeurs propres de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, comptées avec multiplicité, est n.

Preuve: χ_A est scindé dans $\mathbb{C}[X]$

$n = \deg(\chi_A) =$ somme des multiplicités des racines

Proposition. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et n impair, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \neq \varnothing$.

$$\tilde{\chi}_A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto \chi_A(t)$$

est continue, de limite $-\cancel{\pm}\infty$ en $-\infty$

et $+\cancel{\mp}\infty$ en $+\infty$

(selon le signe du coeff dominant 1)

Par le th des V.I, χ_A s'annule au moins une fois.

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est valeur propre de A, alors $\overline{\lambda}$ est aussi valeur propre de A, avec même multiplicité.

$\chi_A \in \mathbb{R}[X]$

λ racine de χ_A de multiplicité m

$\Longrightarrow$ $\overline{\lambda}$ racine χ_A avec multiplicité m.

$$Sp(A) = Sp(A^T)$$

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A et $A^\top$ ont le même polynôme caractéristique, et donc les mêmes valeurs propres.

Remarque. *A et $A^\top$ ont les mêmes valeurs propres, mais pas les mêmes vecteurs propres. On peut cependant montrer que, pour λ valeur propre, $E_\lambda(A)$ et $E_\lambda(A^\top)$ ont la même dimension.*

$$\begin{aligned}
\chi_{A^T}(X) &= \det(XI_n - A^T) \\
&= \det((XI_n - A^T)^T) \\
&= \det(XI_n - A) \\
&= \chi_A(X)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dim(E_\lambda(A^T)) &= \dim(\operatorname{Ker}(A^T - \lambda I_n)) \\
&= n - \operatorname{rg}((A^T - \lambda I_n)^T) \quad \text{par th du rang.} \\
&= n - \operatorname{rg}(A - \lambda I_n) \\
&= \dim(E_\lambda(A))
\end{aligned}$$

4.3 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Proposition. Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **polynôme caractéristique de** u le polynôme caractéristique de toute matrice représentant u dans une base.

Si $A = PBP^{-1}$ où $P \in GL_n(\mathbb{K})$

alors $\widetilde{\chi_A}(\cancel{X}) = \det(\cancel{X} I_n - A)$

$= \det(\cancel{X} \cancel{I_n} - PBP^{-1})$

$PP^{-1} = I_n$ $\qquad PP^{-1}$

$= \det(P(\cancel{X} I_n - B)P^{-1})$

$= \det(P)\det(\cancel{X} I_n - B)\det(P^{-1})$

$= \underbrace{\det(P)\det(P^{-1})}_{=1} \widetilde{\chi_B}(\cancel{X})$

donc on peut parler du pol caractéristique de $u \in \mathcal{L}(E)$.

4.4 Polynôme caractéristique et sous-espace stable

Lemme. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme, et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. On note u_F l'endomorphisme induit par u sur F.
Alors χ_{u_F} divise χ_u.

$$u_F : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}$$

Soit $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à F.

ie $\mathcal{B} = (\mathcal{E}, \mathcal{D})$ où $\mathcal{E}$ base de F

et $\mathcal{D}$ complète $\mathcal{E}$ en une base de E.

$$A = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} u(\mathcal{E}) & u(\mathcal{D}) \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & D \end{array}\right) & \begin{array}{c} \mathcal{E} \\ \mathcal{D} \end{array} \end{array}$$

car F stable par u.

et $B = \mathrm{Mat}(u_F, \mathcal{E})$

$$\chi_u(X) = \chi_A(X) = \det(XI_n - A)$$

$$= \left|\begin{array}{c|c} XI_p - B & -C \\ \hline 0 & XI_q - D \end{array}\right|$$

$p = \dim F$

où $p + q = n$

triangulaire par blocs

$$= \det(XI_p - B) \times \det(XI_q - D)$$

$$= \chi_{u_F}(X) \cdot \det(XI_q - D)$$

donc $\chi_{u_F} \mid \chi_u$

Théorème.

La dimension d'un sous-espace propre est au plus égale à la multiplicité de la valeur propre correspondante :
Si $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est de dimension finie, si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ et si $m(\lambda)$ désigne la multiplicité de λ, alors :

$$1 \leqslant \dim E_\lambda(u) \leqslant m(\lambda)$$

Le résultat se traduit aussi matriciellement.

Preuve : Soit λ vp de u

- $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \{0\}$

  donc $\dim E_\lambda(u) \geq 1$

- Notons $d = \dim E_\lambda(u)$.

  $E_\lambda(u)$ est stable par u (évidemment !)

  et l'application induite par u est :

  $$u_{E_\lambda(u)} : \begin{array}{ccc} E_\lambda(u) & \longrightarrow & E_\lambda(u) \\ x & \longmapsto & u(x) = \lambda x \end{array}$$

  c'est l'homothétie de rapport λ.

  (ie : $u_{E_\lambda(u)} = \lambda \mathrm{Id}_{E_\lambda(u)}$)

par le lemme $\chi_{u_{E_\lambda(u)}} \mid \chi_u$

$$\chi_{u_{E_\lambda(u)}} = \chi_{\lambda \mathrm{Id}_{E_\lambda(u)}} = (X-\lambda)^d \quad \text{où } d = \dim E_\lambda(u)$$

donc dans la factorisation de $\chi_u = (X-\lambda)^{m_\lambda} \times$ qqch...

donc $d \leq m_\lambda$.

Corollaire. Si λ est une valeur propre de multiplicité 1, alors le sous-espace propre associé est une droite vectorielle, c'est-à-dire est de dimension 1.

5 Diagonalisabilité

5.1 Diagonalisabilité d'un endomorphisme en dimension finie

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est **diagonalisable** s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$ soit diagonale.
Cela revient à dire qu'il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.

$$\mathrm{Mat}(u,\mathcal{B}) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} u(e_1) & & u(e_n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \end{array} \quad \text{ie} \quad \begin{array}{c} u(e_1) = \lambda_1 e_1 \\ \vdots \\ u(e_n) = \lambda_n e_n \end{array}$$

Caractérisation.

Soit E espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u est diagonalisable si et seulement si E est somme (directe) des sous-espaces propres de u :

$$u \text{ diagonalisable} \iff \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u) = E$$
$$\iff \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim\left(E_\lambda(u)\right) = n$$

Preuve: On sait déjà que la somme est directe.

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$

Soit $\mathcal{B}_\lambda$ base de $E_\lambda(u)$, donc les vecteurs de $\mathcal{B}_\lambda$ sont des vecteurs propres associés à λ.

concaténation

Alors la concaténation $\mathcal{B} = \textcircled{c}_{\lambda \in Sp(u)} \mathcal{B}_\lambda$

c'est une base de E car $E = \bigoplus E_\lambda$

et est formée de vecteurs propres de u

donc u diagonalisable.

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose u diagonalisable.

Soit $\mathcal{B}$ base de vecteurs propres de u.

On réorganise les vecteurs pour avoir

$$\mathcal{B} = \bigcup_{\lambda \in Sp(u)} \mathcal{B}_\lambda$$

$$Mat(u, \mathcal{B}) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} u(\mathcal{B}_{\lambda_1}) & u(\mathcal{B}_{\lambda_p}) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \lambda_p & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_p \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \mathcal{B}_{\lambda_1} \\ \\ \\ \\ \mathcal{B}_{\lambda_p} \end{array} \end{array}$$

On a $E_\lambda(u) = Vect(\mathcal{B}_\lambda)$ (cf matrice)

et $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$ par fractionnement de base

Caractérisation.

Soit E espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u est diagonalisable si et seulement si

- χ_u est scindé
- chaque sous-espace propre a pour dimension la multiplicité de la valeur propre associée

$\dim E_\lambda(u) = m(\lambda)$

Remarque. *Ça signifie que l'on peut écrire :*

$$\chi_u = \prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)^{m_i}, \quad \text{avec les } \lambda_i \text{ distincts}$$

et

$$\forall i \in \{1,\dots,p\},\ \dim\left(E_{\lambda_i}(u)\right) = m_i$$

Preuve:

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose $\forall \lambda$, $\dim E_\lambda(u) = m(\lambda)$ et χ_u est scindé.

On sait que

$$\begin{aligned}\dim E &= n \\ &= \deg(\chi_u) \\ &= \sum_{\lambda \in Sp(u)} m(\lambda) \quad \text{car } \chi_u \text{ scindé}\end{aligned}$$

donc $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$ car $m(\lambda) = \dim E_\lambda(u)$

ie u diagonalisable.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si u diagonalisable, il existe une base de vecteurs propres. Avec les notations précédentes

$$\chi_u = \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X-\lambda)^{\dim E_\lambda(u)}$$

Corollaire. Soit E espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Si u admet n valeurs propres distinctes, alors u est diagonalisable. Et ses sous-espace propres sont des droites vectorielles.

Remarque. *C'est bien une condition suffisante, non nécessaire.*

Si χ_u scindé simple (scindé à racines simples)

alors u est diagonalisable.

5.2 Diagonalisabilité d'une matrice carrée

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **diagonalisable** si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale :

$$\exists D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ diagonale}, \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\ A = PDP^{-1}$$

Remarque. *Les coefficients de D sont les valeurs propres de A, avec multiplicité.*

Les propriétés vues pour les endomorphismes se traduisent matriciellement :

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$\begin{aligned} A \text{ diagonalisable} &\iff \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} E_\lambda(A) = \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \\ &\iff \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim\big(E_\lambda(A)\big) = n \\ &\iff \begin{cases} \chi_A \text{ est scindé} \\ \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ \dim\big(E_\lambda(A)\big) = m(\lambda) \end{cases} \end{aligned}$$

On a aussi :

$$\chi_A \text{ est scindé à racines simples} \implies A \text{ diagonalisable}$$

Enfin, si $A = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$,

$$A \text{ est diagonalisable} \iff u \text{ diagonalisable}$$

Exemple

A B C D E F

diagonalisables ?

- A :

$\chi_A = X(X-\sqrt{3})(X+\sqrt{3})$

scindé simple donc A diagonalisable.

$\exists P \in GL_3(\mathbb{R})$ tq $A = P\begin{pmatrix} 0 & & (0) \\ & \sqrt{3} & \\ (0) & & -\sqrt{3} \end{pmatrix}P^{-1}$

- B :

$\chi_B = (X-3)(X-1)^2$ scindé.

* étude $E_3(B)$

3 est vp simple

on sait que $1 \leq \dim E_3(B) \leq 1$

donc $E_3(B)$ est une droite vecto.

* étude $E_1(B)$

λ vp double

donc $1 \leq \dim E_1(B) \leq 2$

$$E_1(B) = \operatorname{Ker}(B - 1 \cdot I_3)$$

$$= \operatorname{Ker} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{de rang} \geq 2}$$

car C_1, C_2 non colinéaires

donc $\dim E_1(B) \leq 3 - 2 = 1$

Ainsi $\dim E_1(B) < m(1)$

donc B n'est pas diagonalisable.

• C $\quad \chi_C(X) = (X-2)^3$

idée 1 : $\dim E_2(C) = \dim \operatorname{Ker}(\ldots)$

$= \ldots < 3 = m(2)$

idée 2 : il y a une unique valeur propre !

Si C est diagonalisable

alors $\exists P \in GL_3(\mathbb{R})$ tq

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = C = P \begin{pmatrix} 2 & & (0) \\ & 2 & \\ (0) & & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= P \cdot 2 I_3 \cdot P^{-1}$$

$$= 2 I_3 \quad \text{absurde.}$$

<u>idée 3</u> il y a une unique valeur propre !

Si C est diagonalisable, $\dim E_2(C) = 3$

donc $E_2(C) = \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$

donc tous les vecteurs sont vecteurs propres associés à la vp 2

donc C est matrice de $2\,Id$.

(homothétie). absurde.

• D $\qquad \chi_D(X) = (X-2)^2 (X+4)$

<u>On diagonalise :</u>

* <u>Recherche de $E_2(D)$</u> (de dim 1 ou 2)

$$E_2(D) = \operatorname{Ker}(D - 2I_3)$$

$$= \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

de rang 1

donc $E_2(D)$ de dim 2

$$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

car $C_1 - C_2 = 0$

$C_1 + C_3 = 0$

noté E_1, E_2

* <u>Recherche de $E_{-4}(D)$</u> (de dim 1 car $m(-4) = 1$)

$$E_{-4}(D) = \mathrm{Ker}\,(D + 4 I_3)$$

$$= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix}6 & 0 & 0\\-3 & 3 & 3\\3 & 3 & 3\end{pmatrix}$$

$C_2 - C_3 = 0$

donc $E_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \in E_{-4}(D)$ de dim 1

donc $E_{-4}(D) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

* $\dim E_2(D) + \dim E_{-4}(D) = 3$

donc <u>D diagonalisable</u>.

$D = \mathrm{Mat}(u, \text{can})$ $\quad u\ \cancel{\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ $\quad u \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{31}(\mathbb{R}))$

E_1, E_2 base de $E_2(D)$

E_3 base de $E_{-4}(D)$

et $E_2(D)$ et $E_{-4}(D)$ sont en somme directe.

donc (E_1, E_2, E_3) base de $E_2(D) \oplus E_{-4}(D) = \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$

$\mathcal{B}'$

On note $D' = \text{Mat}(u, \mathcal{B}')$

$P = \text{Pass}(\text{can} \to \mathcal{B}')$

Par changement de base : $D = P D' P^{-1}$

$$P = \begin{array}{c} \mathcal{B}' \\ \left(E_1 \middle| E_2 \middle| E_3 \right)_{\text{can}} \end{array}$$

On rédige ainsi.

En posant $P = (E_1 | E_2 | E_3)$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

on a :

$$D = P \left(\begin{array}{cc:c} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & -4 \end{array}\right) P^{-1}$$

les vp dans le même ordre que les vecteurs propres dans P

Remarque. *Diagonaliser A, c'est trouver une matrice de passage P et une matrice D diagonale telle que $A = PDP^{-1}$. Sauf si c'est demandé, on ne calcule pas P^{-1}.*

Proposition. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$A \text{ diagonalisable} \iff A^\top \text{ diagonalisable}$$

Preuve : $\chi_A = \chi_{A^\top}$

et $\forall \lambda \in Sp(A) = Sp(A^\top)$

$$\dim E_\lambda(A) = \dim E_\lambda(A^\top)$$

donc A diagonalisable

$$\iff \sum_{\lambda \in Sp(A)} \dim E_\lambda(A) = n$$

$$\iff \sum_{\lambda \in Sp(A^\top)} \dim E_\lambda(A^\top) = n$$

$\iff$ $A^\top$ est diagonalisable.

5.3 Le théorème spectral

On démontrera et on complètera plus tard le résultat suivant :

Proposition. Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est symétrique à coefficients réels, alors A est diagonalisable.

5.4 Des exemples

Exemple. Diagonaliser $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, matrice pleine de 1.

Exemple. Diagonaliser $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où $a_{ij} = \begin{cases} \alpha & \text{si } i = j \\ \beta & \text{sinon} \end{cases}$

Exemple. On considère $B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer une base de $\operatorname{Ker} B$ et une base de $\operatorname{Im} B$. Puis montrer que B est diagonalisable.