Pour jé : 24.3

24.15

Prochain DS : lundi

Diagonalisation

Je me souviens

1. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, quel est l'endomorphisme canoniquement associé ?
2. Que signifie : « $F_1, \ldots, F_p$ sont en somme directe » ?

① c'est $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ tq $\mathrm{Mat}(f, \mathrm{can}) = A$

ou $u \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}))$ tq $\mathrm{Mat}(u, \mathrm{can}) = A$

$E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$

$$u : \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$$

② on note $F_1 \oplus \cdots \oplus F_p \subset E$

$\forall x_1 \in F_1 \ldots x_p \in F_p \quad x_1 + \cdots + x_p = 0_E \Rightarrow x_1 = \cdots x_p = 0$

1 Éléments propres d'un endomorphisme

1.1 Définition

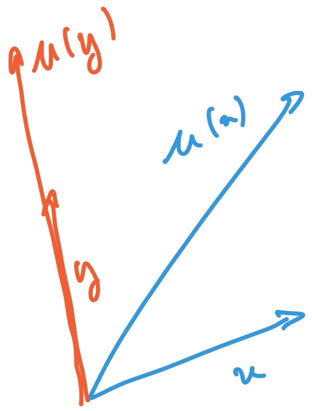
Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est **valeur propre** de u lorsqu'il existe x non nul tel que :

$$u(x) = \lambda x$$

On dit alors que x est **vecteur propre** de u associé à la valeur propre λ.

Remarque. *Insistons : il faut qu'il existe un vecteur **non nul** tel que...*

Remarque. *Un vecteur propre, c'est un vecteur non nul tel que $u(x)$ est colinéaire à x.*



Définition. On appelle **équation aux éléments propres** l'équation :

$$u(x) = \lambda x$$

où l'on cherche les valeurs de λ pour lesquelles il existe des solutions x non nuls à l'équation, et on cherche ces solutions aussi.

Définition. Si λ est une valeur propre de u, on appelle **sous-espace propre associé à λ** l'espace :

$$\begin{aligned} E_\lambda(u) &= \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \\ &= \{x \in E,\ u(x) = \lambda x\} \end{aligned}$$

Rmq : $E_\lambda(u)$ n'est pas tout à fait l'ens des vecteurs propres associés à λ. Il y a 0_E en plus.

$$x \in E_\lambda(u) \iff u(x) = \lambda x$$

1.2 Propriétés

Proposition. x est un vecteur propre de u si et seulement si la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(x)$ est stable par u.

↳ indique une direction propre

Preuve : On suppose $x \neq 0$

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tq $u(x) = \lambda x$

On a $u(x) = \lambda x$

$\in \mathrm{Vect}(x)$

donc $\mathrm{Vect}(x)$ est stable par u.

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose $\mathrm{Vect}(x)$ stable par u

ie $u(x) \in \mathrm{Vect}(x)$

ie $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tq $u(x) = \lambda x$

donc x est vecteur propre de u.

Théorème.

Des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.
Plus précisément : si E est un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$, et si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes de u, alors la somme $E_{\lambda_1}(u) + \cdots + E_{\lambda_p}(u)$ est directe. On l'écrit donc :

$$E_{\lambda_1}(u) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(u) \quad \text{ou encore} \quad \bigoplus_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}(u)$$

Preuves par récurrence sur p

- Si λ_1 est une vp, $E_{\lambda_1}(u)$ est en somme directe...

  (soit $x_1 \in E_{\lambda}(u)$ tq $x_1 = 0$ donc $x_1 = 0$)

- Soit $p \geq 2$. On suppose que $\lambda_1 \dots \lambda_p$ sont des vp distinctes, et $E_{\lambda_1} \dots E_{\lambda_{p-1}}$ sont en somme directe.

<u>Mque $E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_{p-1}} \oplus E_{\lambda_p}$.</u>

Soit $x_1 \in E_{\lambda_1} \dots x_p \in E_{\lambda_p}$

tq $x_1 + \dots + x_{p-1} + x_p = 0$ (1) on applique u

$u(x_1) + \dots + u(x_{p-1}) + u(x_p) = 0$

ie $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{p-1} x_{p-1} + \lambda_p x_p = 0$ (2)

car chq $x_i \in E_{\lambda_i}(u)$

(2) $- \lambda_p$ (1) : $\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_p) x_1}_{\in E_{\lambda_1}(u)} + \dots + \underbrace{(\lambda_{p-1} - \lambda_p) x_{p-1}}_{\in E_{\lambda_{p-1}}(u)} = 0$

or par H.R, $E_{\lambda_1}(u) \dots E_{\lambda_{p-1}}(u)$ sont en somme directe

donc $(\lambda_1 - \lambda_p) x_1 = 0 \dots (\lambda_{p-1} - \lambda_p) x_{p-1} = 0$

or $\lambda_1 \neq \lambda_p \dots \lambda_{p-1} \neq \lambda_p$

donc $x_1 = 0 \dots x_{p-1} = 0$

Dans (1), on a aussi $x_p = 0$

<u>Conclusion</u> :

<u>Rmq</u> : §6.1

Théorème.

Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
Plus précisément : si E est un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$, et si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres λ_i deux à deux distinctes, alors $(x_i)_{i\in I}$ est libre.

Preuve : Soit $(x_i)_{i\in I}$ famille de vecteurs propres associés à des λ_i distincts.

Soit $(i_1 \dots i_p)$ une sous-famille finie de I

Mq $(x_{i_1} \dots x_{i_p})$ est libre.

Soit $\alpha_1 \dots \alpha_p \in \mathbb{K}$ tq $\underbrace{\alpha_1 x_{i_1}}_{\in E_{\lambda_{i_1}}(u)} + \dots + \underbrace{\alpha_p x_{i_p}}_{\in E_{\lambda_{i_p}}(u)} = 0$

or les $E_{\lambda_i}(u)$ sont en somme directe

donc $\alpha_1 x_{i_1} = 0 \quad \dots \quad \alpha_p x_{i_p} = 0$

les $x_i \neq 0$ car ce sont des vecteurs propres

donc $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$

Corollaire. Si E est de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors u admet au plus n valeurs propres distinctes.

Preuve : les familles libres ont au plus n éléments.

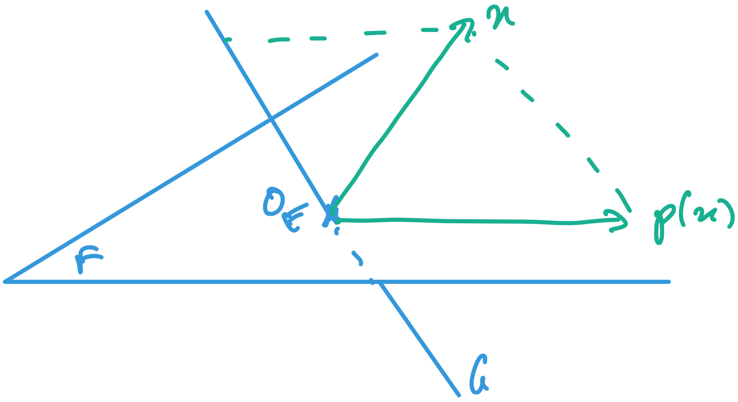
Proposition. Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$, avec $u \circ v = v \circ u$. Alors :

- Tout sous-espace propre de u est stable par v
- $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont stables par v

1.3 Exemples

Exemple. Soit E un espace vectoriel. Déterminer les éléments propres de :

1. p projeteur de E
2. s symétrie de E
3. h homothétie de rapport k



$E = F \oplus G$

p proj. sur F de direction G.

Pour $x \in F$, $p(x) = x$

donc les $x \neq 0$, $x \in F$ sont vecteurs propres associés à la vp. 1. $E_1(p) = F = \operatorname{Im} p$

$= \operatorname{Ker}(p - 1.\mathrm{Id})$

Pour $x \in G$, $p(x) = 0_E = 0_{\mathbb{K}} \cdot x$

donc $0_{\mathbb{K}}$ est vp de p et

$E_0(p) = \operatorname{Ker}(p - 0\,\mathrm{Id}_E)$

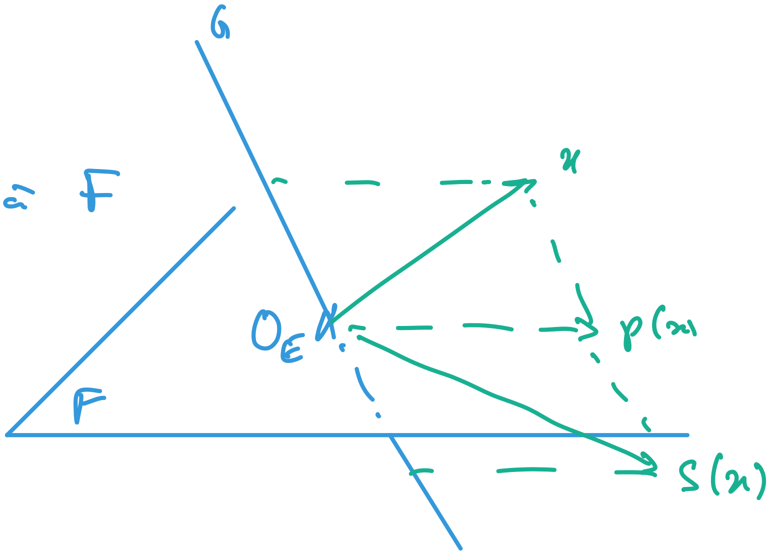
$= \operatorname{Ker}(p) = G$.

Rmq. pas d'autre vp !!

$E = F \oplus G$

s la sym par rapport à F

de direct° G.



$F = \mathrm{Ker}(s - 1\,\mathrm{Id}_E) = E_1(s)$

$G = \mathrm{Ker}(s + 1\,\mathrm{Id}_E) = E_{-1}(s)$

1 et -1 sont les vp de s.

Soit h homothétie de rapport λ

$$h : E \longrightarrow E$$
$$x \longmapsto \lambda x$$

$\forall x \in E, \quad h(x) = \lambda x$

donc $E_\lambda(h) = E$

λ est la seule vp de h

Exemple. Déterminer les éléments propres de :

1. $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$

2. $v : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f' \end{array}$

1 Équation aux éléments propres :

$$u(P) = \lambda P \text{ ie } \boxed{P' = \lambda P}$$

1er cas : $\lambda = 0$ $\quad P' = 0$

les sol sont les $P \in \mathbb{R}_0[X] \neq \{0\}$

donc 0 est vp et $E_0(u) = \mathbb{R}_0[X]$

2e cas $\lambda \neq 0$ $\quad P' = \lambda P$

n'a pour solution que 0

(car $\deg(P') = \deg(P) - 1$ dès que $\deg(P) \geq 1$)

Donc 0 est la seule vp de u.

2 éq. aux éléments propres : $v(f) = \lambda f$

$$\boxed{f' = \lambda f}$$

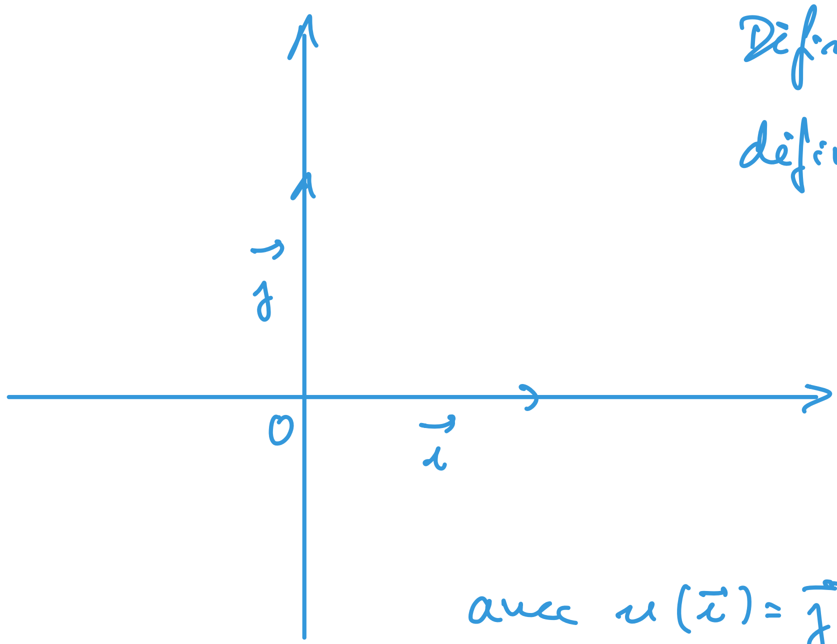
$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, cette équation a pour solution :

$$\mathrm{Vect}(x \mapsto e^{\lambda x})$$

Tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ est vp de v

et $E_\lambda(v) = \mathrm{Vect}(x \mapsto e^{\lambda x})$

Exemple. Donner un exemple simple d'endomorphisme du plan euclidien usuel qui n'a aucune valeur propre.



Définir u, c'est définir $u(\vec{i})$ et $u(\vec{j})$

avec $u(\vec{i}) = \vec{j}$ et $u(\vec{j}) = -\vec{i}$

(rot. d'angle $\frac{\pi}{2}$),

il n'y a pas de valeur propre.

1.4 En dimension finie

Remarque. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :*

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ valeur propre de } u &\iff \exists x \neq 0_E,\ u(x) = \lambda x \\
&\iff \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}_E) \neq \{0_E\} \\
&\iff u - \lambda \operatorname{Id}_E \text{ non injective} \\
&\iff u - \lambda \operatorname{Id}_E \text{ non bijective} \qquad \text{car } u \text{ endomorphisme de } E \text{ qui est de dimension finie.}
\end{aligned}$$

$\iff \det(u - \lambda \mathrm{Id}_E) = 0$

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **spectre de** u :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Sp}(u) &= \{\lambda \in \mathbb{K},\ u - \lambda \operatorname{Id}_E \notin \operatorname{GL}(E)\} \\
&= \{\lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \text{ valeur propre de } u\}
\end{aligned}$$

Proposition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$u \in \operatorname{GL}(E) \iff 0 \notin \operatorname{Sp}(u)$$

2 Éléments propres d'une matrice carrée

2.1 Définition

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les éléments propres de A sont les éléments propres de l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ qui lui est canoniquement associé :

$$u_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & AX \end{array}$$

Ainsi, λ est une **valeur propre de** A s'il existe une matrice colonne non nulle X telle que $AX = \lambda X$. On dit alors que X est un **vecteur propre de** A**, associé à** λ. L'espace $E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$ est l'**espace propre associé à** λ, et l'équation :

$$AX = \lambda X$$

est l'**équation aux éléments propres**. Le **spectre de** A, noté $\mathrm{Sp}(A)$, est l'ensemble des valeurs propres de A.

2.2 Critère d'inversibilité

Proposition. Avec les notations de la défnition :

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff 0 \notin \mathrm{Sp}(A)$$

2.3 Un mot sur le corps de base

Remarque. *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On peut donc chercher les valeurs propres réelles ou les valeurs propres complexes de A. On note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et on a :*

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$$

Exemple. Déterminer les valeurs propres de $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Proposition. Plus généralement, si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}'$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \subset \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}'}(A)$.

- $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ vue dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{21}(\mathbb{R})$ $\lambda \in \mathbb{R}$

$$AX = \lambda X \iff \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -\lambda x - y = 0 \\ \boxed{1} x - \lambda y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -\overbrace{(1+\lambda^2)}^{\neq 0} y = 0 & L_1 \leftarrow L_1 + \lambda L_2 \\ x - \lambda y = 0 & L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

l'éq aux éléments propres n'a que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour solution donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$

• $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ vue dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{21}(\mathbb{C})$ $\quad\lambda\in\mathbb{C}$

$$AX=\lambda X \iff \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases}-\lambda x - y = 0\\ \boxed{1}\,x-\lambda y=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}-(1+\lambda^2)\,y = 0 & L_1\leftarrow L_1+\lambda L_2\\ x-\lambda y = 0 & L_2\end{cases}$$

<u>1er cas</u> : $1+\lambda^2\neq 0$ alors seul $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ est solution

<u>2e cas</u> : $1+\lambda^2=0$

$$AX=\lambda X \iff \{\,x-\lambda y=0$$

$$\iff X\in\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}\lambda\\1\end{pmatrix}$$

<u>Ccl</u> : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)=\{\pm i\}$

et $E_i(A)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}$

$E_{-i}(A)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix}$

$X=\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}$ $\qquad AX=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}-1\\i\end{pmatrix}=i\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}=iX$$

3 Éléments propres d'une matrice carrée représentant un endomorphisme

3.1 Lien entre matrice et endomorphisme

Proposition. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B}$ une base de E, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$.

- Les valeurs propres de A sont les valeurs propres de u :

$$\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(u)$$

- Les vecteurs propres de A sont les matrices des vecteurs propres de u :

$$\begin{aligned} X \in E_\lambda(A) &\iff AX = \lambda X \\ &\iff u(x) = \lambda x \\ &\iff x \in E_\lambda(u) \end{aligned}$$

où $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$.

3.2 Éléments propres et matrices semblables

Proposition. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables, $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

- Les valeurs propres de A sont les valeurs propres de B :

$$\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(B)$$

- Les vecteurs propres de A et les vecteurs propres de B sont liés par la formule de changement de base :

$$\begin{aligned} X \in E_\lambda(A) &\iff AX = \lambda X \\ &\iff PBP^{-1}X = \lambda X \\ &\iff B\big(P^{-1}X\big) = \lambda\big(P^{-1}X\big) \\ &\iff P^{-1}X \in E_\lambda(B) \end{aligned}$$

$X \mapsto P^{-1}X$ est un isomorphisme de $E_\lambda(A) \to E_\lambda(B)$.

4 Polynôme caractéristique

4.1 Polynôme caractéristique d'une matrice

Définition. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit :

$$\chi_A = \det(XI_n - A) \in \mathbb{K}[X]$$

appelé le **polynôme caractéristique de** A.

Proposition. χ_A est de degré n et on connaît *a priori* quelques coefficients :

$$\chi_A = \det(XI_n - A) = X^n - \operatorname{tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$$

Explication : cas où A est triangulaire

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$$

$$= \begin{vmatrix} X-a_{11} & & & * \\ & X-a_{22} & & \\ & (0) & \ddots & \\ & & & X-a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{k=1}^{n} (X - a_{kk}) \in \mathbb{K}_n[X]$$

on développe

$$= X^n + (-\sigma_1)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \sigma_n$$

$$\sigma_1 = \underbrace{a_{11} + \dots + a_{nn}}^{\operatorname{tr}(A)}$$

$$\sigma_n = \underbrace{a_{11} \cdots a_{nn}}_{\det A}$$

Preuve : cas général. On note $C_1 \dots C_n$ les colonnes de A.

$$\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$$
$$= \det\left(XE_1 - C_1 \,|\, XE_2 - C_2 \,|\, \dots \,|\, XE_n - C_n\right)$$

où $E_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow k$

donc par linéarité par rapport à la 1ère colonne

$$= X\det\left(E_1 \,|\, XE_2 - C_2 \,|\, \dots \,|\, XE_n - C_n\right)$$
$$- \det\left(C_1 \,|\, XE_2 - C_2 \,|\, \dots \,|\, XE_n - C_n\right)$$

le faire avec $n=3$

on développe encore ... et on regroupe selon les puissances de X

$$= X^n \det\underbrace{\left(E_1 \,|\, E_2 \,|\, \dots \,|\, E_n\right)}_{I_n}$$
$$+ X^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \det\left(E_1 \,|\, \dots \,|\, E_{k-1} \,|\, -C_k \,|\, E_{k+1} \dots \,|\, E_n\right)$$
$$+ \dots$$
$$+ 1 \cdot \det\left(-C_1 \,|\, -C_2 \,|\, \dots \,|\, -C_n\right)$$

$$= X^n - X^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & C_k & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{vmatrix}}_{a_{kk}} + \dots$$

$$+(-1)^n \det(C_1 | \dots | C_n)$$

$$= X^n - \mathrm{tr}(A)\, X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$$

Proposition. Les valeurs propres de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont les racines de sont polynôme caractéristique χ_A.

$$\begin{aligned} \lambda \text{ vp de } A &\iff A - \lambda I_n \text{ non inversible} \\ &\iff \det(A - \lambda I_n) = 0 \\ &\iff \chi_A(\lambda) = 0 \end{aligned}$$

Rmq : chercher les vp de A

soit envisager l'éq aux éléments propres $AX = \lambda X$

soit chercher les racines de χ_A. (et ensuite éventuellement $E_\lambda(A)$)

Rmq. dans certains ouvrages, $\chi_A = \cancel{\det(A - XI_n)}$ $\det(XI_n - A)$

Exemple. Déterminer les valeurs propres de : en calculant χ_A sous forme factorisée.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X+2 & 0 & -1 \\ 1 & X-1 & -1 \\ 1 & -1 & X-1 \end{vmatrix} \in \mathbb{R}[X]$$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$$= \begin{vmatrix} X+2 & 0 & -1 \\ 1 & X-1 & -1 \\ 0 & -X & X \end{vmatrix}$$

on factorise par X dans L_3

$$= X \begin{vmatrix} X+2 & 0 & -1 \\ 1 & X-1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$C_2 \leftarrow C_2 + C_3$

$$= X \begin{vmatrix} X+2 & -1 & -1 \\ 1 & X-2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

dév L_3

$$= X\left(X^2 - 4 + 1\right)$$

$$= X(X-\sqrt{3})(X+\sqrt{3})$$

Donc $Sp(A) = \{0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$

Rmq : $\exists X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq 0$ tq $AX = \sqrt{3}X$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_B(X) = \begin{vmatrix} X-3 & 0 & -1 \\ -2 & X-1 & -1 \\ 1 & -1 & X-1 \end{vmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$$= \begin{vmatrix} X-3 & 0 & -1 \\ -X+1 & X-1 & 0 \\ 1 & -1 & X-1 \end{vmatrix}$$

$C_1 \leftarrow C_1 + C_2$

$$= (X-1) \begin{vmatrix} X-3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & X-1 \end{vmatrix}$$

div L_2

$$= (X-1)(X-1)(X-3)$$

donc $Sp(B) = \{1, 3\}$

<u>Remarque</u>: 3 est racine simple de χ_B

1 est racine double de χ_B

on dit que 3 est vp simple de B

1 est vp double de B.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition. Soit A diagonale ou triangulaire :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \spadesuit & \cdots & \cdots & \spadesuit \\ 0 & a_{22} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \spadesuit \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\chi_A = \prod_{i=1}^{n} (X - a_{ii})$$

Corollaire. Les valeurs propres d'une matrice diagonale, d'une matrice triangulaire, sont les coefficients diagonaux de la matrice.