Pour mer : 23.1
23.12

Déterminants

$\det_{\mathcal{B}}(x_1 \dots x_n)$ $\Big\{$ $\det(A)$
$\det(u)$

1 Déterminant d'une famille de n vecteurs dans une base

1.1 Déterminant dans une base

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $x_1, \dots, x_n$ n vecteurs, et on note $(a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ les coordonnées de x_j dans la base $\mathcal{B}$. On a :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}$$

Proposition. $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme n-linéaire alternée sur E. Elle est aussi antisymétrique.

$\det_{\mathcal{B}}$ est l'unique forme n-linéaire alternée

tq $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.

<u>Mque</u> si φ est n-linéaire,

$$\varphi \text{ alternée} \iff \varphi \text{ antisymétrique}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose φ antisymétrique.

Soit $i \neq j$

$$\varphi(\dots, \underset{i}{x}, \dots, \underset{j}{x}, \dots) = -\varphi(\dots, \underset{i}{x}, \dots, \underset{j}{x} \dots)$$

donc $\varphi(\dots, x, \dots, x, \dots) = 0$

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose φ alternée

Soit $i \neq j$

$$\begin{aligned}
0 &= \varphi(\dots, \underset{i}{x_i + x_j}, \dots, \underset{j}{x_i + x_j}, \dots) \\
&= \varphi(\dots, x_i, \dots, x_i, \dots) \longleftarrow \text{nul} \\
&\quad + \varphi(\dots, x_j, \dots, x_i \dots) \\
&\quad + \varphi(\dots, x_i, \dots, x_j \dots) \\
&\quad + \varphi(\dots, x_j, \dots, x_j \dots) \longleftarrow \text{nul}
\end{aligned}$$

donc $\varphi(\dots x_j \dots x_i \dots) = -\varphi(\dots x_i, \dots x_j \dots)$

Théorème de structure.

> Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base. Il existe une unique forme n-linéaire alternée ϕ sur E telle que $\phi(e_1, \dots, e_n) = 1$. Et toute forme n-linéaire alternée est de la forme $\lambda\phi$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

ϕ est $\det_{\mathcal{B}}$.

$$\Lambda = \left\{ \varphi : \begin{array}{ccc} E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1 \dots x_n) & \longmapsto & \varphi(x_1 \dots x_n) \end{array} \right.$$

φ n-linéaire, φ alterné $\Big\}$

$\llcorner\ \forall i \neq j \quad \varphi(\dots, \underset{\underset{i}{\uparrow}}{x}, \dots, \underset{\underset{j}{\uparrow}}{x}, \dots) = 0$

Rmq φ est alors antisymétrique

$$\forall i \neq j \quad \varphi(\dots, \underset{\underset{i}{\uparrow}}{x_j}, \dots, \underset{\underset{j}{\uparrow}}{x_i}, \dots) = -\varphi(\dots, \underset{\underset{i}{\uparrow}}{x_i}, \dots, \underset{\underset{j}{\uparrow}}{x_j}, \dots)$$

Λ est une droite vectorielle.

1.2 Changement de base

Proposition. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$:

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}'}(x_1, \ldots, x_n)$$

1.3 Déterminant et indépendance linéaire

Proposition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E. Alors, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$:

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) = 0 \iff (x_1, \ldots, x_n) \text{ est liée}$$

Corollaire.

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) \neq 0 \iff (x_1, \ldots, x_n) \text{ est une base de } E$$

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose $(x_1 \ldots x_n)$ liée.

$\exists(\lambda_1 \ldots \lambda_n) \neq (0, \ldots 0)$ tq $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$

donc $\det_{\mathcal{B}}(x_1 \ldots x_n)$ . .

$\exists i, \exists(\lambda_j)_{j \neq i}$ tq $x_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j x_j$

donc $\det_{\mathcal{B}}(x_1 \ldots x_n) = \det_{\mathcal{B}}(\ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{\sum_{j \neq i} \lambda_j x_j}, \ldots)$

$= \sum_{j \neq i} \lambda_j \det_{\mathcal{B}}(\ldots \underset{\substack{\uparrow \\ j}}{x_j} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{x_j} \ldots)$

$= \sum_{j \neq i} \lambda_j \, 0$

$= 0$

$\boxed{\Rightarrow}$ par contraposée

On suppose $(x_1 \dots x_n)$ libre

<u>Mq</u> $\det_{\mathcal{B}}(x_1 \dots x_n) \neq 0$

$\mathcal{B}' = (x_1 \dots x_n)$ est une base de E

donc $\det_{\mathcal{B}'}$ est un multiple de $\det_{\mathcal{B}}$

$\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}') = 1$ donc $\det_{\mathcal{B}'}$ est non nul.

$\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(x_1 \dots x_n)$

donc $\det_{\mathcal{B}}(x_1 \dots x_n) \neq 0$.

2 Déterminant d'un endomorphisme

Définition. Soit u endomorphisme de E espace vectoriel de dimension n. Pour toute base $\mathcal{B}$ de E et toute famille $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$:

$$\det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \ldots, u(x_n)) = \det(u) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$$

En particulier, en notant $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$:

$$\det(u) = \det_{(e_1,\ldots,e_n)}(u(e_1), \ldots, u(e_n))$$

$\phi : (x_1 \ldots x_n) \longmapsto \det_{\mathcal{B}}(u(x_1) \ldots u(x_n))$

ϕ est n-linéaire, alternée.

donc $\phi \in \Lambda = \mathrm{Vect}(\det_{\mathcal{B}})$

donc $\exists$ scalaire, noté $\det_{\mathcal{B}}(u)$ tq

$\forall x_1 \ldots x_n \quad \phi(x_1 \ldots x_n) = \det_{\mathcal{B}}(u) \det_{\mathcal{B}}(x_1 \ldots x_n)$

En fait, $\det_{\mathcal{B}}(u)$ ne dépend pas de la base choisie

on le note $\det(u)$.

On remarque :

$$\det(u) = \det_{\mathcal{B}}(u(e_1) \ldots u(e_n))$$

Proposition.

- $\forall u, v \in \mathcal{L}(E)$, $\det(u \circ v) = \det(u) \det(v)$
- $u \in \mathrm{GL}(E) \iff \det(u) \neq 0$ et $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det(u)}$

Soit $\mathcal{B}$ base de E.

$\forall x_1 \dots x_n \in E,$

$$\det_{\mathcal{B}}(u \circ v(x_1), \dots, u \circ v(x_n))$$
$$= \det_{\mathcal{B}}(u(v(x_1)) \dots u(v(x_n)))$$
$$= \det u \times \det_{\mathcal{B}}(v(x_1) \dots v(x_n))$$
$$= \underbrace{\det(u) \times \det(v)}\ \det_{\mathcal{B}}(x_1 \dots x_n)$$
$$= \underbrace{\qquad\qquad}_{\text{c'est } \det(u \circ v) \text{ par déf.}} \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$$

$$\det \mathrm{Id}_E = 1$$

3 Déterminant d'une matrice carrée

Formule.

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}$$

Proposition. L'expression de $\det(A)$ est polynomiale en les coefficients de A.

Remarque. *C'est l'argument utilisé pour justifier la continuité de $A \mapsto \det(A)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.*

det A = somme de tous les produits de coeff en prenant 1 coeff dans chq ligne et chq colonne. (× signe)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad a_{\dots 1} \; a_{\dots 2} \; a_{\dots 3}$$

Proposition.

- Si A est la matrice de $u \in \mathcal{L}(E)$ dans la base $\mathcal{B}$, alors $\det(A) = \det(u)$.
- Si A est la matrice de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ de E dans la base $\mathcal{B}$, alors $\det(A) = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$.
- A est la matrice de la famille de ses colonnes $(C_1, \dots, C_n)$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$), donc $\det(A) = \det_{\text{base canonique}}(C_1, \dots, C_n)$.

Proposition. Pour des matrices carrées, on a :

- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
- $\det(A^\top) = \det(A)$
- $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det(A) \neq 0$ et $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$
- Deux matrices semblables ont le même déterminant

$$\det(\lambda A) = \det\left(\lambda C_1 \,\vdots\, \lambda C_2 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \lambda C_n \right)$$

linéaire par rapport à chq colonne

$$= \lambda \det\left(C_1 \,\vdots\, \lambda C_2 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \lambda C_n \right)$$

$$= \cdots = \lambda^n \det\left(C_1 \mid \cdots \mid C_n \right)$$

- Deux matrices semblables ont le même déterminant

$\boxed{M1}$ Soit A, B semblables, ie $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ tq $A = PBP^{-1}$

donc $\det(A) = \det(PBP^{-1})$

$$= \det(P)\det(B)\det(P^{-1})$$

$$= \det(P)\det(B) \cdot \frac{1}{\det(P)}$$

$$= \det(B)$$ car $\times$ commutatif dans $\mathbb{K}$

$\boxed{M2}$ A, B semblables

$\exists E$ ev de dim n, $u \in \mathcal{L}(E)$ $\quad \mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases de E

tq $A = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) \qquad B = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}')$

donc $\det(A) = \det(a) = \det(B)$

4 Calcul de déterminants

4.1 Développement par rapport à une ligne, à une colonne

Définition. Soit A une matrice carrée d'ordre n. Pour tout i, j, on note $\Delta_{i,j}$ le déterminant de la matrice carrée $(n-1) \times (n-1)$ obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A. On l'appelle le **mineur** associé à a_{ij}.
On appelle **cofacteur** de a_{ij} la quantité $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.

Théorème.

$i+j$ indice de ligne + indice de colonne

Le développement par rapport à la j-ème colonne est :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$$

Le développement par rapport à la i-ème ligne est :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$$

4.2 Déterminant de matrices diagonales, triangulaire

Proposition. Si A est triangulaire (et donc si A est diagonale), $\det(A)$ est le produit des coefficients diagonaux :

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

dev L_n $\quad D_n = (-1)^{n+n} a_{nn} D_{n-1}$

4.3 Opérations sur les lignes et les colonnes

Proposition.

- $L_i \leftrightarrow L_j$: échanger deux lignes multiplie le déterminant par -1
- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, où $i \neq j$: ajouter à une ligne une CL des autres ne modifie pas le déterminant
- $L_i \leftarrow \lambda L_i$, où $\lambda \neq 0$: multiplier une ligne par λ multiplie le déterminant par λ. Mais on raisonne en pratique par égalité, en pensant qu'on factorise par λ dans la ligne i.

4.4 Déterminants par blocs

Proposition. Soit A, C deux matrices carrées. On considère la matrice triangulaire par blocs définie par :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\det M = \det(A) \times \det(C)$$

Proposition. Soit A une matrice triangulaire par blocs :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \spadesuit & \cdots & \cdots & \spadesuit \\ 0 & A_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \spadesuit \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\det A = \det A_1 \det A_2 \dots \det A_p$$

Preuve : (astuce)

Calcul :

$$\begin{array}{c|cc|} & p & q \\ p & & \\ q & & \end{array} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{array}{c} p \\ q \end{array}$$

$n = p + q$

$$= \left(\begin{array}{c|c} I_p A + 0_{pq} 0_{qp} & I_p B + 0_{pq} I_q \\ \hline 0_{qp} A + C\, 0_{qp} & 0_{qp} B + C I_q \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

$$\det \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) = \det \left(\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \times \det \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & I_q \end{array}\right)$$

avec $\det\left(\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right) = \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & & (0) & \\ & \ddots & & (0) \\ (0) & & 1 & \\ \hline & (0) & & C \end{array}\right|$

$$\overset{\text{dév } C_1}{=} 1 \cdot (-1)^{1+1} \times \left|\begin{array}{c|c} I_{p-1} & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right|$$

$$\overset{\text{par réc}}{=} \det(C)$$

$$\det\left(\begin{array}{c|c} A & \cancel{B} \\ \hline 0 & I_q \end{array}\right) \overset{\text{dév } L_n}{=} 1 \cdot (-1)^{n+n} \left|\begin{array}{c|c} A & \cancel{B'} \\ \hline 0 & I_{q-1} \end{array}\right|$$

sans la dernière colonne

$$\overset{\text{par réc}}{=} \det(A)$$

4.5 Déterminant de Vandermonde

Résultat. Pour $a_1, a_2, \dots, a_n$ dans $\mathbb{K}$, le **déterminant de Vandermonde** :

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

vaut :

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$$

Remarque. *Il faut comprendre qu'il s'agit d'un produit double :* $\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=i+1}^{n} (a_j - a_i)$.

Idée 1 :

$$V(a_1, \dots a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$\forall i \in \{2 \dots n\}$

$L_i \leftarrow L_i - L_1$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 0 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1^1 & & a_2^{n-1} - a_1^{n-1} \\ & & (a_2-a_1)(a_2+a_1) & & (a_2-a_1)\sum_{i=0}^{n-2} a_2^i a_1^{n-2-i} \\ & & & & \end{vmatrix}$$

J'ai peur.

idée 2 $\quad C_j \leftarrow C_j - a_n C_{j-1}$

pour $j = n$ puis $j = n-1$ ... puis $j = 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{cccccc} & & (a_1-a_n)a_1 & (a_1-a_n)a_1^2 & & (a_1-a_n)a_1^{n-2} \\ = & \begin{vmatrix} 1 & a_1-a_n & a_1^2-a_1a_n & a_1^3-a_1^2a_n & \cdots & a_1^{n-1}-a_na_1^{n-2} \\ 1 & a_2-a_n & (a_2-a_n)a_2 & (a_2-a_n)a_2^2 & & (a_2-a_n)a_2^{n-2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & & 0 \end{vmatrix} \end{array}$$

dév L_n

$$= (-1)^{n+1}\, 1 . \begin{vmatrix} a_1-a_n & (a_1-a_n)a_1 & \cdots & (a_1-a_n)a_1^{n-2} \\ \vdots & & & \\ a_{n-1}-a_n & \cdots & & \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\cancel{n+1}\ n-1} (a_1-a_n)\cdots(a_{n-1}-a_n)\, V(a_1 \ldots a_{n-1})$$

$$= \prod_{i<n} (a_n - a_i) \quad V(a_1 \ldots a_{n-1})$$

$$= V(a_1 \ldots a_{n-1}, a_n)$$

$$\prod_{i<j} (a_j - a_i)$$