Pour me: 23.1

23.12

Déterminants

1 Déterminant d'une famille de n vecteurs dans une base

1.1 Déterminant dans une base

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit $x_1, \ldots, x_n$ n vecteurs, et on note $(a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ les coordonnées de x_j dans la base $\mathcal{B}$. On a :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \ldots a_{\sigma(n)n}$$

Proposition. $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme n-linéaire alternée sur E. Elle est aussi antisymétrique.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1 \ldots x_n) = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} = A$$

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1 \ldots x_n) = \det A = \det \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1 \ldots x_n)$$

Rmq: $\det_{\mathcal{B}} : E^n \to \mathbb{K}$, $(x_1 \ldots x_n) \mapsto \det_{\mathcal{B}}(x_1 \ldots x_n)$

$\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $A \mapsto \det(A)$

$\det_{\mathcal{B}}$ est une forme n-linéaire :

$x \longmapsto \det_{\mathcal{B}}(x, x_2, .., x_n)$ linéaire

ie $\det_{\mathcal{B}}(\lambda x + \lambda' x', x_2 .. x_n)$

$= \lambda \det_{\mathcal{B}}(x, x_2 ... x_n) + \lambda' \det_{\mathcal{B}}(x', x_2 .. x_n)$

$\det_{\mathcal{B}}$ est alterné

dès que $\exists\, i \neq j$ tq $x_i = x_j$

$\det_{\mathcal{B}}(x_1 .. x_i .. x_j .. x_n) = 0$

$\det_{\mathcal{B}}$ est antisymétrique :

pour $i \neq j$

$$\det_{\mathcal{B}}(\ldots \underset{\text{place } i}{x_j} \ldots \underset{\text{place } j}{x_i} \ldots) = - \det_{\mathcal{B}}(\ldots \underset{\text{place } i}{x_i} \ldots \underset{\text{place } j}{x_j} \ldots)$$

1.2 Changement de base

Proposition. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$:

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}'}(x_1, \ldots, x_n)$$

1.3 Déterminant et indépendance linéaire

Proposition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E. Alors, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$:

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) = 0 \iff (x_1, \ldots, x_n) \text{ est liée}$$

Corollaire.

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) \neq 0 \iff (x_1, \ldots, x_n) \text{ est une base de } E$$

$\boxed{\Leftarrow}$ cas où $n=3$

On suppose (x_1, x_2, x_3) liée

ie $\exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0,0,0)$ tq $\lambda_1 \vec{x_1} + \lambda_2 \vec{x_2} + \lambda_3 \vec{x_3} = \vec{0}$

l'un des vecteurs s'écrit comme CL des autres.

Par exemple : $\exists \lambda_2, \lambda_3$ tq $x_1 = \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$

(sinon, on échange x_1 et x_i, ce qui change le signe du déterminant)

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}) = \det_{\mathcal{B}}(\lambda_2 \vec{x_2} + \lambda_3 \vec{x_3}, \vec{x_2}, \vec{x_3})$$

$$= \lambda_2 \det_{\mathcal{B}}(x_2, x_2, x_3) + \lambda_3 \det_{\mathcal{B}}(x_3, x_2, x_3)$$

$$= \lambda_2\, 0 + \lambda_3\, 0 \quad \text{car } \det_{\mathcal{B}} \text{ alternée}$$

$$= 0$$

Cas général.

On suppose $(x_1 \dots x_n)$ est liée.

ie $\exists i$, des scalaires $(\lambda_j)_{j\neq i}$ tq

$$x_i = \sum_{j\neq i} \lambda_j x_j$$

$$\det_B(x_1 \dots x_n) = \det_B\Big(x_1 \dots , \overset{\overset{i}{\downarrow}}{\sum_{j\neq i} \lambda_j x_j}, \dots x_n\Big)$$

par n-linéarité

$$= \sum_{j\neq i} \lambda_j \det_B\Big(x_1, \dots, \overset{\overset{\text{place } i}{\downarrow}}{x_j}, \dots \underset{\underset{\text{place } j}{}}{\underset{\uparrow}{x_j}}, x_n\Big)$$

$$= 0 \quad \text{car } \det_B \text{ est alterné.}$$

2 Déterminant d'un endomorphisme

Définition. Soit u endomorphisme de E espace vectoriel de dimension n. Pour toute base $\mathcal{B}$ de E et toute famille $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$:

$$\det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \ldots, u(x_n)) = \det(u) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$$

En particulier, en notant $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$:

$$\det(u) = \det_{(e_1, \ldots, e_n)}(u(e_1), \ldots, u(e_n))$$

Rmq : la valeur de det(u) ne dépend pas de la base dans laquelle on fait le calcul.

Proposition.

- $\forall u, v \in \mathcal{L}(E)$, $\det(u \circ v) = \det(u)\ \det(v)$
- $u \in \mathrm{GL}(E) \iff \det(u) \neq 0$ et $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det(u)}$

3 Déterminant d'une matrice carrée

Formule.

$A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}$$

Proposition. L'expression de $\det(A)$ est polynomiale en les coefficients de A.

Remarque. *C'est l'argument utilisé pour justifier la continuité de $A \mapsto \det(A)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1)1}\, a_{\sigma(2)2}\, a_{\sigma(3)3}$$

det A = somme de tous les produits de 3 coeff pris dans lignes et colonnes différentes (±)

Proposition.

- Si A est la matrice de $u \in \mathcal{L}(E)$ dans la base $\mathcal{B}$, alors $\det(A) = \det(u)$.
- Si A est la matrice de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ de E dans la base $\mathcal{B}$, alors $\det(A) = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$.
- A est la matrice de la famille de ses colonnes $(C_1, \dots, C_n)$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$), donc $\det(A) = \det_{\text{base canonique}}(C_1, \dots, C_n)$.

et donc le déterminant (d'une matrice) est une forme n-linéaire alternée par rapport aux colonnes de la matrice.

Proposition. Pour des matrices carrées, on a :

- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
- $\det(A^\top) = \det(A)$
- $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det(A) \neq 0$ et $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$
- Deux matrices semblables ont le même déterminant

Cas où $n=3$

$$\det A = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

$$\det \lambda A = \begin{vmatrix} \lambda C_1 & \lambda C_2 & \lambda C_3 \end{vmatrix}$$

$$= \det_{can}(\lambda C_1, \lambda C_2, \lambda C_3)$$

$$= \lambda \det_{can}(C_1, \lambda C_2, \lambda C_3)$$

$$= \lambda^3 \det_{can}(C_1, C_2, C_3)$$

- Deux matrices semblables ont le même déterminant

$\boxed{\text{M1}}$ Soit A, B semblables, ie $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$

tq $A = PBP^{-1}$

$$\det(A) = \det(PBP^{-1})$$

$$= \det(P)\det(B)\det(P^{-1})$$

$$= \det(P)\det(B) \cdot \frac{1}{\det(P)}$$

$$= \det(P) \cdot \frac{1}{\det(P)} \det(B)$$ × commutatif dans $\mathbb{K}$.

$$= \det(B)$$

$\boxed{R2}$ Soit A, B semblables

donc A et B représentent la même endom.

dans des bases différentes

$\exists E$ ev, $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ bases de E

tq $\quad A = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}_1) \qquad B = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}_2)$

$$\det A = \det(u)$$
$$= \det(B)$$

4 Calcul de déterminants

4.1 Développement par rapport à une ligne, à une colonne

Définition. Soit A une matrice carrée d'ordre n. Pour tout i, j, on note $\Delta_{i,j}$ le déterminant de la matrice carrée $(n-1) \times (n-1)$ obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A. On l'appelle le **mineur** associé à a_{ij}.

On appelle **cofacteur** de a_{ij} la quantité $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.

Théorème.

Le développement par rapport à la j-ème colonne est :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$$

Le développement par rapport à la i-ème ligne est :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$$

$\boxed{23.7}$

$$D_n = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}_{[n]}$$

on développe par rapport à C_n

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} a_{in} \Delta_{in}$$

$$= (-1)^{n-1+n}\, 1 \cdot \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & \cdots & \cancel{0} \\ 1 & 2\cos\theta & \ddots & \ddots & \cancel{\vdots} \\ 0 & \ddots & 2\cos\theta & 1 & \cancel{0} \\ \cancel{\vdots} & \cancel{\ddots} & \cancel{\ddots} & \cancel{2\cos\theta} & \cancel{1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cancel{2\cos\theta} \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{n+n} \cdot 2\cos\theta \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & \cdots & \cancel{0} \\ 1 & 2\cos\theta & \ddots & \ddots & \cancel{\vdots} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \cancel{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2\cos\theta & \cancel{1} \\ \cancel{0} & \cancel{\cdots} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{2\cos\theta} \end{vmatrix}}_{D_{n-1}}$$

$$= -1 \cdot \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & & (0) & \\ 1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{vmatrix}_{[n-1]} + 2\cos\theta\, D_{n-1}$$

on développe par rapport à L_{n-1}

$$= -1 \cdot (-1)^{n-1+n-1}\, 1 \cdot D_{n-2} + 2\cos\theta\, D_{n-1}$$

<u>Ainsi</u>: $(D_n)_n$ satisfait la rel. de récurrence

$$D_n = 2\cos\theta\, D_{n-1} - D_{n-2} \quad \forall n \geq 3.$$

suite réc. linéaire d'ordre 2 à coeff constant.

$$X^2 - 2\cos\theta\, X + 1 = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$$

$$\Delta = 4\cos^2\theta - 4 = (2i\sin\theta)^2$$

$$r = \frac{2\cos\theta \pm i2\sin\theta}{2} = e^{\pm i\theta}$$

donc $\exists A', B' \in \mathbb{C}$ tq $D_n = A'(e^{i\theta})^n + B'(e^{-i\theta})^n$

on veut les sol. réelles

donc $\exists A, B \in \mathbb{R}$ tq $D_n = A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)$

avec D_1, D_2, on calcule A et B.

4.2 Déterminant de matrices diagonales, triangulaire

Proposition. Si A est triangulaire (et donc si A est diagonale), $\det(A)$ est le produit des coefficients diagonaux :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

4.3 Opérations sur les lignes et les colonnes

Proposition.

- $L_i \leftrightarrow L_j$: échanger deux lignes multiplie le déterminant par -1
- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, où $i \neq j$: ajouter à une ligne une CL des autres ne modifie pas le déterminant
- $L_i \leftarrow \lambda L_i$, où $\lambda \neq 0$: multiplier une ligne par λ multiplie le déterminant par λ. Mais on raisonne en pratique par égalité, en pensant qu'on factorise par λ dans la ligne i.

4.4 Déterminants par blocs

Proposition. Soit A, C deux matrices carrées. On considère la matrice triangulaire par blocs définie par :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\det M = \det(A) \times \det(C)$$

Proposition. Soit A une matrice triangulaire par blocs :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \spadesuit & \cdots & \cdots & \spadesuit \\ 0 & A_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \spadesuit \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\det A = \det A_1 \det A_2 \dots \det A_p$$

Preuve : (astuce)

Calculer le produit par blocs : (préciser la taille des blocs)

$$\begin{array}{c} \\ p \\ q \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} p & q \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} p & q \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & I \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ p \\ q \end{array}$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} I_p A + 0_{pq} 0_{qp} & I_p B + 0_{pq} I_q \\ \hline 0_{qp} A + C\, 0_{qp} & 0_{qp} B + C I_q \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

Donc $\det \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) = \det \left(\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \times \det \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & I_q \end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

avec :

$$\det \left(\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \overset{\text{dév } C_1}{=} \det \left(\begin{array}{c|c} I_{p-1} & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \qquad (-1)^{1+1}$$

$$\overset{\text{par réc}}{=} \det (C)$$

$$\det \left(\begin{array}{c|c} A & * \\ \hline 0 & I_q \end{array}\right) \overset{\text{dév } L_{p+q}}{=} (-1)^{p+q+p+q} \, 1 . \det \left(\begin{array}{c|c} A & * \\ \hline 0 & I_{q-1} \end{array}\right)$$

$$= \det \left(\begin{array}{c|c} A & * \\ \hline 0 & I_{q-1} \end{array}\right)$$

$$\overset{\text{réc}}{=} \det A .$$

4.5 Déterminant de Vandermonde

Résultat. Pour $a_1, a_2, \dots, a_n$ dans $\mathbb{K}$, le **déterminant de Vandermonde** :

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

vaut :

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$$

Remarque. *Il faut comprendre qu'il s'agit d'un produit double :* $\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=i+1}^{n} (a_j - a_i)$.

idée 1 :

$$V(a_1, \dots a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$L_i \leftarrow L_i - L_1$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 0 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1^2 & \cdots & a_2^{n-1} - a_1^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & & & \end{vmatrix}$$

Bof...

$(a_2 - a_1)(a_2 + a_1)$

$(a_2 - a_1) \sum_{i=0}^{n-2} a_2^i a_1^{n-2-i}$

idée 2 :

$$V(a_1 \dots a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$C_j \leftarrow C_j - a_n C_{j-1}$

pour $j = n$, puis $j = n-1$

... puis $j = 2$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a_1 - 1.a_n & \cdots & a_1^{n-2} - a_1^{n-3} a_n & a_1^{n-1} - a_1^{n-2} a_n \\ 1 & a_2 - 1.a_n & \cdots & a_2^{n-2} - a_2^{n-3} a_n & a_2^{n-1} - a_2^{n-2} a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

dév L_n

$$= (-1)^{n+1} . 1 \begin{vmatrix} a_1 - a_n & a_1(a_1 - a_n) & \cdots & a_1^{n-2}(a_1 - a_n) \\ \vdots & & & \\ a_{n-1} - a_n & a_{n-1}(a_{n-1} - a_n) & \cdots & a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1} - a_n) \end{vmatrix}$$

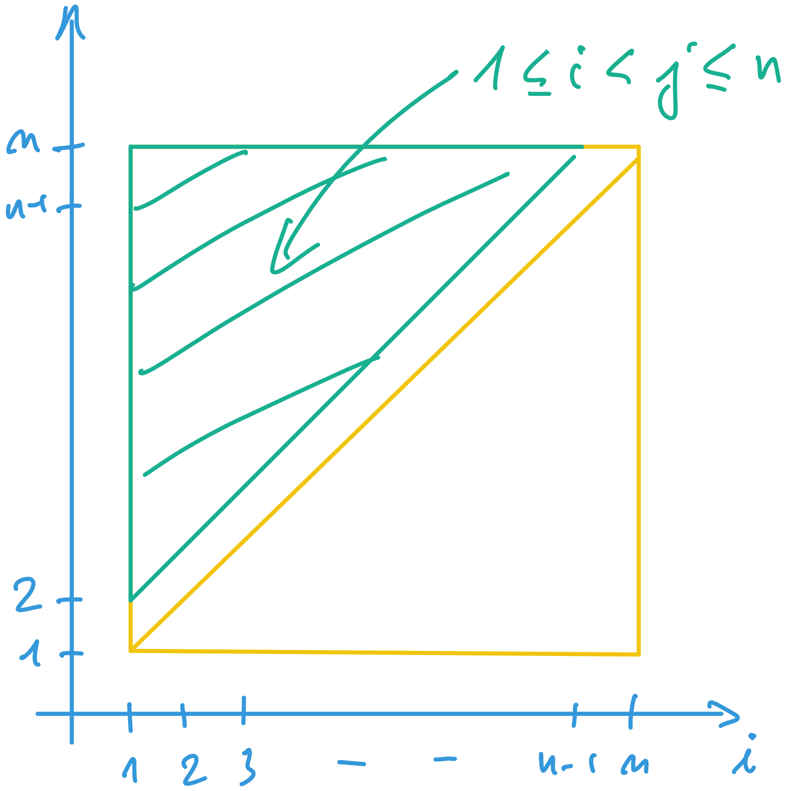
$$= \underbrace{(-1)^{n+1} (a_1 - a_n)(a_2 - a_n) \cdots (a_{n-1} - a_n)}_{(-1)^{n-1}} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

$(a_n - a_1)(a_n - a_2) \dots (a_n - a_{n-1})$

$$= V(a_1 \dots a_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) = V(a_1 \dots a_{n-1}, a_n)$$

Par récurrence,

HR : on suppose $V(a_1 \dots a_{n-1}) = \prod_{j=2}^{n-1} \prod_{i=1}^{j-1} (a_j - a_i)$



$$V(a_1 \dots a_n) = (a_n - a_1)(a_n - a_2) \dots (a_n - a_{n-1}) \times$$
$$(a_{n-1} - a_1) \dots (a_{n-1} - a_{n-2}) \times$$
$$\vdots$$
$$(a_2 - a_1)$$

§5.4