Pour ve : 54.1, 54.2, 54.3

APSYTUDE

Graphothérapeute

$\sum f_n$ série de fonctions

Convergence simple

à x fixé, $\sum f_n(x)$ cv

Convergence normale

$\operatorname{Sup}(|f(t)|\ \ t \in I)$

$\sum \|f_n\|_\infty$ cv

Convergence uniforme

$$\begin{cases} \sum f_n \text{ cv simplement} \\ (R_n)_n \text{ cv unif vers } (x \mapsto 0) \end{cases}$$

1. $f_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{n}$, $I = [0,1]$.

- Étude de la cv simple. Soit $x \in [0,1]$ fixé.

1er cas : $x \neq 1$ $|f_n(x)| = \frac{x^n}{n}$

$\leq x^n$ t.g série abs cv

donc $\sum f_n(x)$ converge (abs)

2e cas : $x = 1$ $f_n(1) = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$

t.g série cv (harmonique alternée)

Donc : $\sum f_n$ cv simplement sur $[0,1]$

- Étude de la cv normale

[...] $\|f_n\|_\infty^{[0,1]} = \frac{1}{n}$

pas de cv normale.

- Étude de la cv uniforme.

On a déjà la cv simple de $\sum f_n$.

Mque $R_n \xrightarrow[n \to +\infty]{CU} 0$

$\forall x \in [0,1]$

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k} \right|$$

Pour $x \in [0,1]$, $\left(\frac{x^k}{k}\right)_k$ est positive,

décroissante, de limite nulle donc

par le th des séries alternées, $\sum (-1)^k \frac{x^k}{k}$ cv

et $|R_n(x)| \leq \left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|$

$\leq \frac{1}{n+1}$ indép de x

$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc $R_n \xrightarrow[n \to +\infty]{CU} 0$

Donc $\sum f_n$ cv uniformément sur $[0,1]$.

2. $f_n(x) = xe^{-nx^2}$, $I = \mathbb{R}_+$

• Étude de la cv simple.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$ fixé.

1er cas : si $x = 0$ $\qquad f_n(0) = 0$ $\qquad$ t.g série cv

2e cas : si $x > 0$ $\qquad f_n(x) = x e^{-nx^2}$

série géom. de raison $e^{-x^2} \in]-1, 1[$

donc série convergente.

• Étude de la cv normale $\qquad$ cv ? $\sum \|f_n\|_\infty$?

$|f_n(x)| = x e^{-nx^2}$

$0 \leq \left|f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-1} \leq \|f_n\|_\infty$

t.g série divergente

donc par minoration, $\sum \|f_n\|_\infty$ diverge

donc $\sum f_n$ ne cv pas normalement.

Zut !

- <u>Étude de la cv uniforme</u>.

  * $\sum f_n$ cv simplement sur $[0, +\infty[$

  * <u>Mque $R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} 0$</u>

$\forall x \in [0, +\infty[$

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} x e^{-kx^2}\right|$$

somme géométrique

$$= \begin{cases} x e^{-(n+1)x^2} \cdot \dfrac{1}{1-e^{-x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x e^{-nx^2} \cdot \dfrac{1}{e^{x^2}-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

$$\left|R_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot e^{-1} \cdot \frac{1}{e^{1/n}-1}$$

$e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-1} \cdot \frac{1}{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{\sqrt{n}}{e} \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc $(R_n)_n$ ne cv pas unif vers 0, donc $\sum f_n$ ne cv pas unif sur $[0,+\infty[$.

---

3. $f_n(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n+x^2}$, $I = \mathbb{R}_+$ cv de $\sum f_n$?

• <u>Étude de la cv simple</u> Soit $x \in \mathbb{R}_+$ fixé

<u>idée 1</u>: $|f_n(x)| = \dfrac{1}{n+x^2}$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \quad \text{tg série div.}$$

donc $\sum f_n(x)$ ne cv pas absolument.

<u>idée 2</u>: $\left(\dfrac{1}{n+x^2}\right)_n$ est positive, décroissante, de limite nulle

donc par le th des séries alternées, $\sum (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n+x^2}$

converge

Donc $\sum f_n$ cv simplement.

• <u>Étude de la cv normale</u>

<u>idée 1</u>: Ben non! pas cv simple absolue.

<u>idée 2</u>: $\|f_n\|_\infty^{[0,+\infty[} = \dfrac{1}{n}$ (atteinte pour $x=0$)

- Étude de la cv uniforme :

Mque $R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} (x \mapsto 0)$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad |R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k+x^2} \right|$$

la série vérifie du Th des séries alternées

$$\leq \frac{1}{n+1+x^2}$$

$$\leq \frac{1}{n+1} \qquad \text{indép de } x$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc $R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} (x \mapsto 0)$

donc $\sum f_n$ CV uniformément.

Proposition. Si $\sum f_n$ et $\sum g_n$ convergent uniformément sur I, et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors $\sum(\lambda f_n + \mu g_n)$ converge uniformément sur I.

$$\| R_n(\lambda f + \mu g) \|_\infty \leq |\lambda| \, \| R_n(f) \|_\infty + |\mu| \, \| R_n(g) \|_\infty$$

Proposition. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I, alors la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers $\tilde{0}$ sur I.

permet de justifier la non convergence uniforme.

Preuve : On suppose $\begin{cases} \sum f_n \text{ CV simplement} \\ (R_n)_n \text{ CV uniformément vers } 0 \end{cases}$

On peut écrire $f_n = R_{n-1} - R_n$

$$\forall x \quad f_n(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} f_k(x) - \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$$

or $R_{n-1} \xrightarrow{CU} 0$ et $R_n \xrightarrow{CU} 0$

donc $f_n \xrightarrow{CU} 0$

2 Régularité de la somme d'une série de fonctions

2.1 Transfert de continuité

Théorème.

> Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur I.
> Si :
>
> - $\sum f_n$ converge uniformément sur I (on note S sa somme),
> - pour tout n, f_n est continue sur I,
>
> alors :
>
> - S est continue sur I.

Raisonnement classique. Si $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment $[a, b] \subset I$, et si les f_n sont continues sur I, alors S est continue sur tout $[a, b] \subset I$ donc sur I.

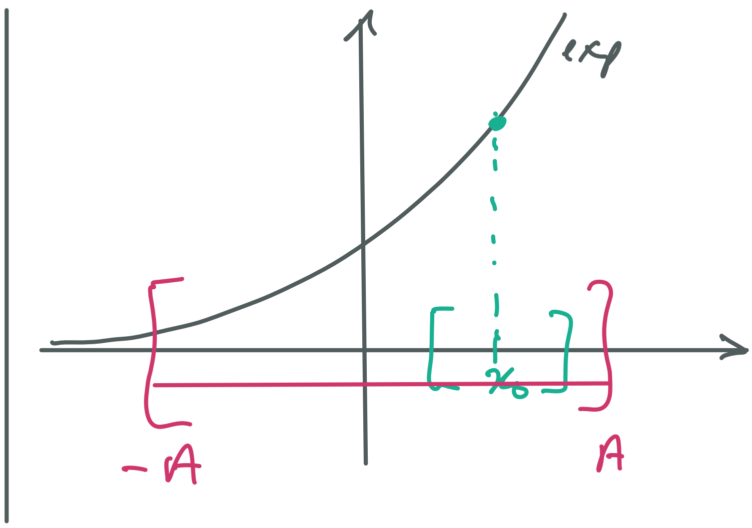
Remarque. *Ce résultat, qui exploite le caractère local de la continuité, s'adapte aussi lorsque la convergence uniforme est vérifiée sur une famille d'intervalles adaptés à la situation.*

Exemple. On note $\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. Montrer que exp est continue sur $\mathbb{R}$.

cv unif ? cv normale ?

$\|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}} = +\infty$

$f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{cv} (x \mapsto 0)$



$f_n : x \mapsto \frac{x^n}{n!}$

- Sur tout $[-A, A] \subset]-\infty, +\infty[$

$\|f_n\|_\infty = \frac{A^n}{n!}$ tg série cv

donc $\sum f_n$ cv normalement donc uniformément sur $[-A, A]$

Les f_n sont continues sur $[-A, A]$

Donc par transfert de continuité,

exp est continue sur tout $[-A, A] \subset]-\infty, +\infty[$

donc sur $]-\infty, +\infty[$

2.2 Théorème de la double limite

Théorème de la double limite.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur I et a une extrémité de I (éventuellement infinie).
Si :

- $\sum f_n$ converge uniformément sur I (on note S sa somme),
- pour tout n, f_n admet une limite finie ℓ_n en a,

alors :

- la série $\sum \ell_n$ converge (on note ℓ sa somme),
- la fonction S admet une limite en a,
- cette limite est égale à ℓ.

Preuve. La démonstration est hors programme. □

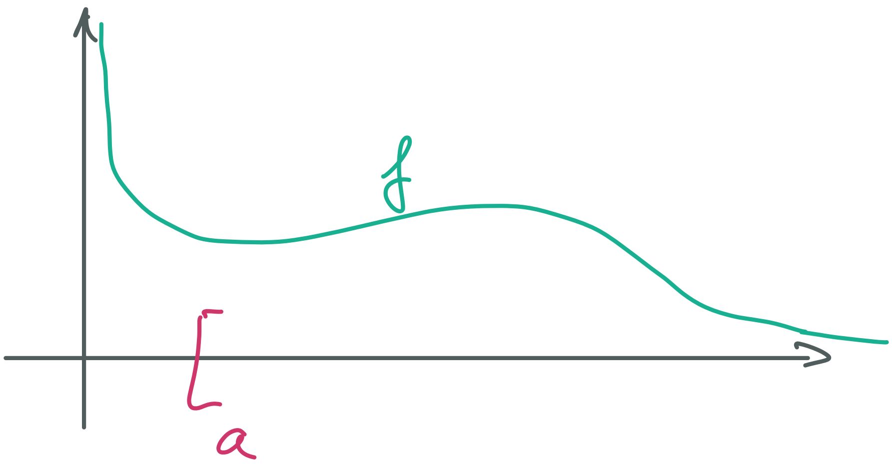
Remarque. *On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :*

$$\lim_{x \to a} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right)$$

mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes de convergence des séries et d'existence des limites envisagées.

Remarque : Attention aux premiers termes de la somme. qui peuvent avoir une limite différente

Exemple. Pour $x > 0$, on note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$. Déterminer la limite pour $x \to +\infty$ de $f(x)$.



Exemple. Pour $x > 0$, on note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$. Déterminer la limite pour $x \to +\infty$ de $f(x)$.

On note $f_n : x \longmapsto \frac{(-1)^n}{x+n}$

- Pour $x > 0$:

$\left(\frac{1}{x+n}\right)_n$ est >0, $\searrow$, de limite nulle

donc par le th des séries alternées,

$\sum f_n(x)$ converge ie $\sum f_n$ cv simplement

et

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k} \right|$$

$$\leq \frac{1}{x+n+1}$$

$$\leq \frac{1}{n+1} \quad \text{indep de } x$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

donc $(R_n)_n$ cv unif vers $(x \longmapsto 0)$

donc $\sum f_n$ cv uniformément.

- pour $n \in \mathbb{N}$ $\quad f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$

$$\xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 = l_n \quad \text{pour tout } n$$

Par double limite :

$$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0$$

Exemple. On s'intéresse à la série $\sum x^n$, qui converge simplement sur $]-1,1[$. Utiliser le théorème de la double limite pour montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $]-1,1[$.

2.3 Somme d'une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur I.
Si :

- $\sum f_n$ converge simplement sur I (on note S sa somme),
- pour tout n, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et $f'_n(x) = \dots$
- la série des dérivées $\sum f'_n$ converge uniformément sur I,

alors :

- S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,
- pour tout x : $S'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x)$.

Remarque.

- *On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}x}(x)$$

qui explique le nom du théorème. Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes de convergence des séries et d'existence des dérivées envisagées.

- *La convergence uniforme de $\sum f_n$ n'entraîne pas la dérivabilité de la somme.*
- *Comme la dérivabilité est une propriété locale, on peut remplacer l'hypothèse de convergence uniforme sur I de $\sum f'_n$ par l'hypothèse moins forte de convergence uniforme sur tout segment de I, ou d'autres intervalles adaptés à la situation.*

Remarque. *Étudier les variations de la somme f d'une série de fonction, c'est d'abord comparer $f(x)$ et $f(y)$ pour $x < y$, ce qui peut souvent se faire en comparant les « sommandes », sans faire appel au théorème de classe $\mathcal{C}^1$, lourd à mettre en œuvre.*

Exemple : Rque exp ↗. Soit $x < y$

$\forall n \quad \frac{x^n}{n!} < \frac{y^n}{n!}$

donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} < \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!}$

donc $e^x < e^y$

(a) Mque $t \longmapsto t e^{-t^2}$ est bornée sur $\mathbb{R}$

(b)

Exemple. Montrer que $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx^2}}{n^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit $f_n : x \longmapsto \frac{1}{n^2} e^{-nx^2}$

- <u>Étude de la cv simple de $\sum f_n$</u>

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2} e^{-nx^2} \underset{n \to +\infty}{=} \frac{1}{n^2} O(1) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

tg série cv

donc $\sum f_n$ cv simplement sur $\mathbb{R}$

- <u>les f_n sont $\mathcal{C}^1$</u> sur $\mathbb{R}$ et

$$f_n'(x) = \frac{1}{n^2} \cdot (-n 2x) e^{-nx^2} = -\frac{2x}{n} e^{-nx^2}$$

- <u>Etude de la cv ~~uniforme~~ normale de $\sum f_n'$</u>

Pour $x \in \mathbb{R}$

$$|f_n'(x)| = \frac{2|x|}{n} e^{-nx^2}$$

$|t e^{-t^2}| \leq M$ $\forall t$

$$= \frac{2|\sqrt{n}\, x|}{n\sqrt{n}} e^{-(\sqrt{n}\, x)^2}$$

$$\leq \frac{2M}{n^{3/2}}$$ indép de x

↳ tg d'une série cv.

Donc $\sum f_n'$ cv normalement sur $\mathbb{R}$,

donc cv uniformément sur $\mathbb{R}$

Par le th de classe $\mathcal{C}^1$ des séries de fct,
la fct S est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{2x}{n} e^{-nx^2}$$

<u>Remarque:</u> Si on veut étudier la monotonie de S,
pas besoin de dériver.

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx^2}}{n^2}$$

sur $[0, +\infty[$, S est $\searrow$.

(a) $\varphi : t \longmapsto t e^{-t^2}$ Mq φ bornée sur $\mathbb{R}$.

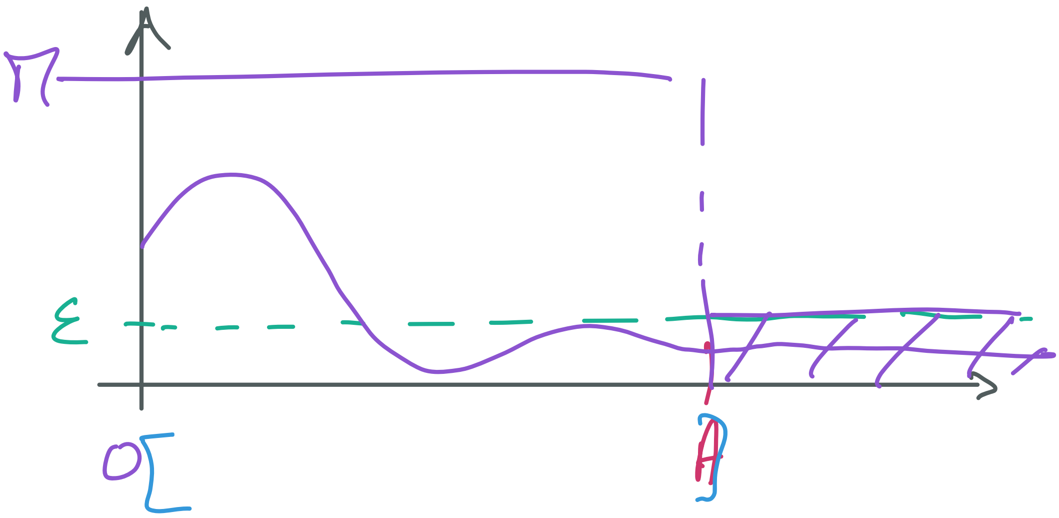
(M1). Cloche $\longrightarrow$ étude de fct sur $\mathbb{R}_+$ (impaire)

t	0		$+\infty$
	$\nearrow$	$\bigcirc$	$\searrow$

M2 • $\varphi(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$

donc, par déf avec $\varepsilon = 1$

$\exists A$ tq $\forall t \geq A \quad |\varphi(t)| \leq 1$



sur $[0, A]$ segment,

φ est continue, donc bornée

$\exists M \geq 0$ tq $\forall t \in [0, A] \quad |\varphi(t)| \leq M$

$\forall t \in [0, +\infty[, \quad |\varphi(t)| \leq \mathrm{Max}(M, 1)$

donc φ est bornée

et $\|\varphi\|_\infty \leq \mathrm{Max}(M, 1)$

Exemple. Étudier la dérivabilité de la somme de la série $\sum \dfrac{1}{x^2 - n^2}$.

$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$

2.4 Extension aux fonctions de classes $\mathcal{C}^k$

Théorème.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définie sur I, et $k \in \mathbb{N}^*$.
Si :

- pour tout n, f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I,
- pour tout $0 \leqslant j \leqslant k-1$, $\sum f_n^{(j)}$ converge simplement sur I,
- la série $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur I,

alors :

- la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I
- pour tout $1 \leqslant j \leqslant k$, $S^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}$.

Remarque.

- *On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :*

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}(x)$$

Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes d'existence des limites et dérivées envisagées.

- *Comme la dérivabilité est une propriété locale, on peut remplacer l'hypothèse de convergence uniforme sur I des $\sum f_n^{(k)}$ par l'hypothèse moins forte de convergence uniforme sur tout segment de I, ou d'autres intervalles adaptés à la situation.*
- *Pour montrer que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on montre la convergence simple de $\sum f_n$ et la convergence uniforme de toutes les $\sum f_n^{(j)}$, pour $j \geqslant 1$.*

Exemple. Montrer que $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^4}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

On note $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^4}$

- Les f_n sont $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et

$$f_n'(x) = \frac{\cos(nx)}{n^3}$$

$$f_n''(x) = -\frac{\sin(nx)}{n^2}$$

- $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{n^4}$ t.g d'une série cv

donc $\sum f_n$ cv simplement sur $\mathbb{R}$

- $|f_n'(x)| \leq \dfrac{1}{n^3}$ tg série cv donc $\sum f'_n$ cv uniformt sur $\mathbb{R}$

- $|f''_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$ indép de x

terme g d'une série cv

donc $\sum f''_n$ cv normalement donc unif

sur $\mathbb{R}$

Donc $S = \sum f_n$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad S''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} - \frac{\sin(nx)}{n^2}.$$

cf $\boxed{54.1}$ $\qquad \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ $\quad \mathcal{C}^\infty$

3 Intégration et séries de fonctions

3.1 Primitivation, intégration terme à terme sur un segment et convergence uniforme

Lemme. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit $a \in I$. Pour tout n, on note F_n la primitive de f_n qui s'annule en a.
Si :

- $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment $K \subset I$ (on note S sa somme),

alors :

- la série $\sum F_n$ converge uniformément sur tout segment $K \subset I$
- $\sum_{n=0}^{+\infty} F_n$ est la primitive de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ qui s'annule en a.

Théorème d'intégration terme à terme sur un segment par convergence uniforme.

Soit $a < b$, et $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un segment $[a, b]$.
Si :

- $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ (on note S sa somme),
- $[a, b]$ est un segment,
- les f_n sont continues,

alors :

- la série $\sum \left(\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \right)$ converge,
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b S(t)\,\mathrm{d}t$

Remarque. *On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes de convergence des séries envisagées.

Exemple. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int_0^x t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = x$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int_0^x t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = x.$$

- Sous réserve d'interversion $\sum / \int$

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} t^n e^{-t}\,dt = \int_0^x e^{-t} \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \right)}_{e^t} dt$$

$$= \int_0^x 1\,dt = x$$

- <u>On vérifie les hypothèses du théorème :</u> x est fixé >0

Notons : $f_n : t \longmapsto \frac{1}{n!} t^n e^{-t}$ $\forall t \in [0, x]$

* $\forall t \in [0,x]$

$$|f_n(t)| = \frac{1}{n!} t^n e^{-t}$$

$$\leq \frac{1}{n!} x^n e^{-0}$$

$$= \frac{x^n}{n!} \quad \text{indépendant de } t$$

$\uparrow$ tg série cv (exp)

donc $\sum f_n$ cv normalement sur $[0, x]$

* $[0, x]$ est un segment

* les f_n sont continues

Donc on peut intervertir $\sum$ et $\int$.

<u>Cas où $x<0$</u> on note $x = -y$ $y>0$

On travaille sur $[x, 0] = [-y, 0]$

$\forall t \in [-y, 0]$ $|f_n(t)| = \left|\frac{t^n}{n!} e^{-t}\right|$

$$\leq \frac{y^n}{n!} e^{y} \quad \text{indép de } t$$

$\uparrow$

Alg série cv (exp)

même conclusion.