8 Dérivation

8.1 Limite d'une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Théorème de dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions.

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur I intervalle.
Si :

- pour tout n, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,
- $(f_n)_n$ converge simplement sur I vers f,
- la suite des fonctions dérivées $(f'_n)_n$ converge uniformément sur I vers une fonction g,

alors :

- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,
- $f' = g$.

Remarque.

- *On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x)\right)$$

qui explique le nom du théorème. Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes d'existence des limites et dérivées envisagées.

- *La convergence uniforme de $(f_n)_n$ n'entraîne pas la dérivabilité de la limite.*
- *Comme la dérivabilité est une propriété locale, on peut remplacer l'hypothèse de convergence uniforme sur I de $(f'_n)_n$ par l'hypothèse moins forte de convergence uniforme sur tout segment de I, ou d'autres intervalles adaptés à la situation.*

Exemple. Étudier la convergence et la dérivabilité de la limite de la suite de fonctions définies par :

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$$

Remarque : personne n'a jamais utilisé ce théorème.

Preuve : Soit $a \in I$ fixé

Pour $x \in I$

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t)\,dt \qquad \text{car } f_n \ \mathcal{C}^1$$

$$\int_a^x f_n'(t)\,dt = [f_n(t)]_a^x$$

<u>$n \to +\infty$</u>

$f_n(x)$	$=$	$f_n(a)$	$+$	$\underbrace{\int_a^x f_n'(t)\,dt}$
$\downarrow{\scriptstyle n\to+\infty}$		$\downarrow{\scriptstyle n\to+\infty}$		$\downarrow{\scriptstyle n\to+\infty}$
$f(x)$		$f(a)$		$\int_a^x g(t)\,dt$
car $f_n \xrightarrow[+\infty]{CS} f$				car $(f_n')_n$ cv unif vers g sur le segment $[a,x]$ et les f_n sont continues.

<u>Bref</u> :

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt$$

Or g est limite uniforme de $(f_n')_n$ et les f_n' sont continues sur I donc, par transfert de continuité, g est continue.

<u>Donc</u> f est de classe $\mathcal{C}^1$ (intégrale fct de la borne d'en haut d'une fct continue) et

$$f'(x) = g(x)$$

8.2 Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Théorème.

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définie sur I intervalle, et $k \in \mathbb{N}^*$.
Si :

- pour tout n, f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I,
- pour tout $0 \leqslant j \leqslant k-1$, $(f_n^{(j)})_n$ converge simplement sur I vers une fonction g_j,
- la suite $(f_n^{(k)})_n$ converge uniformément sur I vers une fonction g_k,

alors :

- la limite simple g_0 de $(f_n)_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I
- pour tout $1 \leqslant j \leqslant k$, $g_0^{(j)} = g_j$.

Remarque.

- *On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :*

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} f_n(x)\right)$$

  qui explique le nom du théorème. Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes d'existence des limites et dérivées envisagées.

- *Comme la dérivabilité est une propriété locale, on peut remplacer l'hypothèse de convergence uniforme sur I des $(f_n^{(k)})_n$ par l'hypothèse moins forte de convergence uniforme sur tout segment de I, ou d'autres intervalles adaptés à la situation.*

- *Pour montrer que g_0 est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on montre la convergence simple de $(f_n)_n$ et la convergence uniforme de toutes les $(f_n^{(j)})_n$, pour $j \geqslant 1$.*

9 Théorèmes d'approximation uniforme

9.1 Approximation par des fonctions en escalier

Théorème.

> Toute fonction continue (par morceaux) sur un segment est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions en escalier.

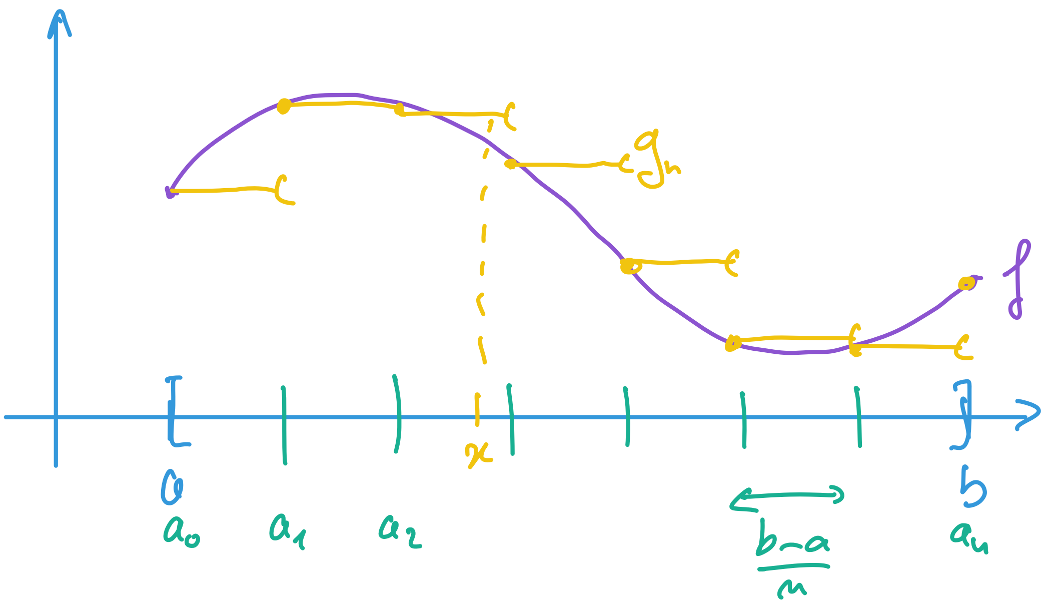
C'est-à-dire :

Si $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ continue,

alors $\exists (g_n)_n$ suite de fct en escalier tq

$$g_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f \quad \text{sur } [a,b]$$

Preuve : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ continue.



On pose : pour $n \in \mathbb{N}^*$

on subdivise $[a,b]$ en posant

$a_0 = a, \quad a_k = a + k\frac{b-a}{n} \qquad k \in [\![0,n]\!]$

et on pose :

$$\begin{cases} g_n(t) = f(a_k) & \text{où} \quad a_k \leq t < a_{k+1} \\ g_n(b) = f(b) \end{cases}$$

g_n est en escalier.

J'espère que $(g_n)_n$ cv unif vers f sur $[a, b]$.

On revient à la déf avec ε.

Mque : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$ $\underbrace{\|g_n - f\|_\infty \leq \varepsilon}_{\forall x \in [a,b] \ |g_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon}$

N est indépendant de x

Soit $\varepsilon > 0$.

Par le Th de Heine, f étant continue sur $[a, b]$ segment f est uniformément continue.

Donc $\exists \delta > 0$ tq $\forall x, y \in [a, b]$

$$|x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Prenons $N = \left\lfloor \frac{b-a}{\delta} \right\rfloor + 1$

alors, pour $n \geq N$, $\frac{b-a}{n} < \delta$

Prenons $n \geq N$, $x \in [a, b]$

Soit k tq $a_k \leq x < a_{k+1}$

$$|g_n(x) - f(x)| = |f(a_k) - f(x)|$$

$$\leq \varepsilon \quad \text{car } |x - a_k| \leq \frac{b-a}{n} < \delta$$

donc $(g_n)_n$ cv unif vers f sur $[a,b]$.

9.2 Approximation par des fonctions polynomiales

Théorème de Weierstrass.

> Toute fonction continue sur un segment est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions polynomiales.

Remarque. *On parle ici de fonctions numériques (à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). L'hypothèse de continuité est importante, celle de segment aussi.*

c'est-à-dire :

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ continue et $[a,b]$ segment.

Alors $\exists (P_n)_n$ suite de $\mathbb{K}[X]$

tq $P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f$ sur $[a,b]$.

Preuve : admis.

$\boxed{53.3}$ ou $\boxed{53.8}$

$P_n \xrightarrow{CU} f$ $\qquad \|P_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$

$\boxed{a}$ Mque $(P_n \times f)_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f\times f$ sur $[0,1]$

$\forall x \in [0,1]$

$$|P_n(x) f(x) - f^2(x)| = |P_n(x) - f(x)|\,|f(x)|$$
$$\leq \|P_n - f\|_\infty \,|f(x)|$$
$$\leq \|P_n - f\|_\infty \,\|f\|_\infty$$

existe car f continue sur le segment $[0,1]$

$$= \|P_n - f\|_\infty \,\|f\|_\infty$$

indépendante de x

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{car } P_n \xrightarrow[+\infty]{CU} f$$

$\boxed{b}$ Par convergence uniforme sur le segment $[0,1]$ (et continuité des $P_n \times f$),

$$\int_0^1 P_n(t) f(t)\,dt \xrightarrow[+\infty]{} \int_0^1 f^2(t)\,dt$$

$\boxed{c}$ Notons $P_n(X) = \sum_{i=0}^{d_n} a_{i,n} X^i$

$$\int_0^1 P_n(t) f(t)\,dt = \int_0^1 \sum_{i=0}^{d_n} a_{i,n}\, t^i f(t)\,dt$$

$$= \sum_{i=0}^{d_n} a_{i,n} \underbrace{\int_0^1 t^i f(t)\,dt}_{=0} \qquad \text{linéarité (somme finie)}$$

$$= 0$$

$\boxed{d}$

$$\int_0^1 P_n(t) f(t)\,dt = 0 \quad \text{par } \boxed{c}$$

$$\downarrow_{+\infty} \qquad\qquad \downarrow_{+\infty}$$

$$\int_0^1 f^2(t)\,dt \qquad\qquad 0$$

par $\boxed{b}$

Par unicité de la limite, $\int_0^1 f^2(t)\,dt = 0$

Intégrale nulle d'une fct continue et positive

donc $\forall t \in [0,1] \quad f(t) = 0$