Pour jeudi : 54.14 (a), 54.15, 54.17. (a)

Séries de fonctions numériques

$f_n : I \longrightarrow \mathbb{K}$
$x \longmapsto f_n(x)$

$\sum f_n$
$S : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$

Dans ce chapitre, les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles ou complexes ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1 Modes de convergence d'une série de fonctions

Dans ce chapitre, on considère des applications $f_n : I \to \mathbb{R}$ et on étudie la série de fonctions $\sum f_n$.

1.1 Convergence simple

Définition. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions $I \to \mathbb{K}$. On dit que $\sum f_n$ **converge simplement** si et seulement si, pour tout $x \in I$ fixé, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge.
Dans ce cas, on définit :

$$\begin{array}{rccl} S : & I & \to & \mathbb{K} \\ & x & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \end{array}$$

appelée **somme** de la série de fonctions $\sum f_n$.

Remarque.

- *La convergence simple est la convergence point à point. On rédige toujours l'étude de la convergence simple en travaillant « à x fixé ».*
- *Pour $n \in \mathbb{N}$, on peut noter :*

$$S_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

Alors $(S_n)_n$ la suite de fonctions des sommes partielles de $\sum f_n$, et la convergence simple de $\sum f_n$ est équivalente à la convergence simple de $(S_n)_n$.

- *En cas de convergence simple sur I, on note :*

$$R_n : x \mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) = S(x) - S_n(x)$$

Alors la suite de fonctions $(R_n)_n$ converge simplement vers la fonction constante nulle sur I.

- *On peut rencontrer des séries de fonctions qui sont indexées par $n \geqslant n_0$.*

Il arrive que la convergence simple n'ait pas lieu sur I tout entier, mais sur une partie J de I. Dans ce cas, la somme de la série de fonction n'est définie que sur J, appelé **domaine de convergence simple** :

Proposition. La somme d'une série de fonction est définie là où la série de fonction converge simplement.

Remarque. *L'étude de la convergence, à x fixé, de $\sum f_n(x)$, se fait en utilisant les outils du chapitre 52 : on travaille en général sur le terme général $f_n(x)$, que l'on essaye de comparer au terme général d'unes série numérique connue (Riemann, géométrique, etc.). Dans ce cas, x joue le rôle d'un paramètre sur lequel on peut être amené à discuter.*

$\sqrt{\geq 0}$ $\ln\left(\frac{}{>0}\right)$ $\frac{1}{\neq 0}$ cv série numérique à x fixé.

Exemple. Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$ dans le cas où :

1. $f_n(x) = x^n$ $S : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$

Étude de la cv simple

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. est-ce que $\sum x^n$ converge ?

1er cas: $|x| < 1$

$\sum x^n$ converge absolument comme série géométrique

2e cas : $|x| \geq 1$

$\sum x^n$ diverge grossièrement.

Cl : $\sum f_n$ converge simplement sur $]-1, 1[$

On peut définir $S :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$

Rmq : $\forall x \in]-1, 1[$ $S(x) = \frac{1}{1-x}$

2. $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$

Étude de la cv simple de $\sum f_n$

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé

1er cas : $x > 1$ $\quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$ converge (Riemann)

2e cas : $x \leq 1$ $\quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$ diverge (Riemann)

donc $\sum_{n\geq 1} f_n$ cv simplement sur $]1, +\infty[$

On peut définir : $\zeta :]1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

3. $f_n(x) = \dfrac{e^{-nx^2}}{n}$

Étude de la cv simple. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.

1er cas : $x = 0$

$f_n(0) = \frac{1}{n}$ $\quad$ t.g. d'une série divergente (harmonique)

2e cas : $x \neq 0$

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx^2}}{n}$$

$$= o\left(\left(e^{-x^2}\right)^n\right)$$

t.g série géométrique cv abs
car $|e^{-x^2}| < 1$

donc $\sum f_n(x)$ converge absolument.

Ccl : $\sum f_n$ cv simplement sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

4. $f_n(x) = (-1)^n \dfrac{e^{-nx^2}}{n}$

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.

1er cas : $x \neq 0$ $\quad \sum f_n(x)$ cv absolument (cf 3.)

2e cas : $x = 0$

$$f_n(0) = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$$

t.g série cv (harmonique alternée)

donc $\sum f_n$ cv simplement sur $\mathbb{R}$

5. $f_n(x) = \dfrac{e^{-nx^2}}{n^2}$

<u>Étude de la cv simple</u>. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé

<u>M1</u> $\left|\dfrac{e^{-nx^2}}{n^2}\right| \leq \dfrac{1}{n^2}$

<u>M2</u> $\dfrac{e^{-nx^2}}{n^2} = \dfrac{O(1)}{n^2}$

$= O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ t.g série absolument convergente

donc $\sum f_n$ cv simplement sur $\mathbb{R}$.

On peut définir $S : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx^2}}{n^2}$

6. $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1 + x^{2n}}$

1.3 Convergence normale

On introduit dans ce paragraphe un autre mode de convergence des séries de fonctions, plus « fort » que les précédents.

Définition. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions : $I \to \mathbb{K}$. On dit que $\sum f_n$ **converge normalement sur** I si et seulement si :

$$\begin{cases} f_n \text{ est bornée sur } I \text{ pour tout } n \\ \sum \|f_n\|_\infty \text{ converge} \end{cases}$$

$\|f_n\|_\infty = \operatorname{Sup}\{ |f_n(t)|, t \in I \}$

Remarque.

- *On peut donner une définition moins forte, en ne travaillant que pour $n \geqslant n_0$.*
- *Le premier point permet de garantir l'existence de $\|f_n\|_\infty = \operatorname{Sup}\{|f_n(x)|, x \in I\}$*
- *Le second point est la convergence d'une série **numérique**.*
- *La convergence normale de $\sum f_n$, c'est la convergence de $\sum \|f_n\|_\infty$.*

Théorème.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions : $I \to \mathbb{K}$.
S'il existe une série numérique $\sum \alpha_n$ convergente et majorante, c'est-à-dire telle que :

$$\forall n, \forall x, \ |f_n(x)| \leqslant \alpha_n$$ indép de x

t.g d'une série cv

où α_n est positive, indépendante de x et t.g. d'une série convergente,
alors $\sum f_n$ converge normalement.

Pour étudier la cv normale:

$\forall x \in I \quad |f_n(x)| \leq \ldots$

$\leq$ indép de x

t.g d'une série convergente

Preuve: Si $\forall x \in I$, $|f_n(x)| \leq \alpha_n$

alors $\|f_n\|_\infty \leq \alpha_n$

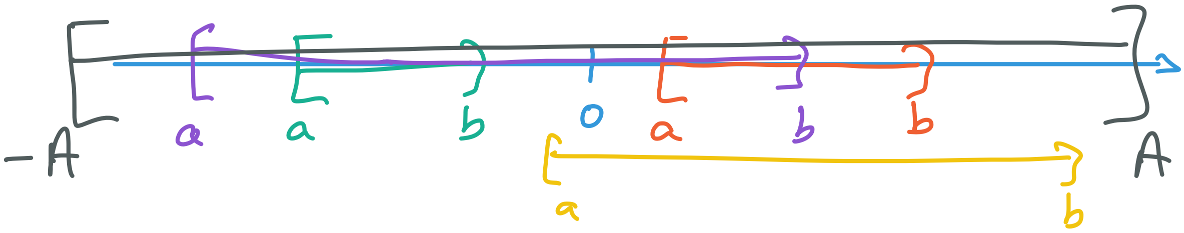
t.g série convergente

donc $\sum \|f_n\|_\infty$ cv par majoration.

Exemple. Étudier la convergence normale sur tout segment de $\sum \frac{x^n}{n!}$.

Soit $[a,b] \subset]-\infty,+\infty[$ un segment.

$\forall x \in [a,b]$ $\quad \left|\frac{x^n}{n!}\right| = \frac{1}{n!}|x|^n$



$|x| \leq \operatorname{Max}(|a|,|b|)$

Soit $[-A,A] \subset]-\infty,+\infty[$ un segment.

$\forall x \in [-A,A]$, $\quad \left|\frac{x^n}{n!}\right| \leq \frac{A^n}{n!}$ indépendant de x

t.g. d'une série cv (série exp)

donc $\sum \frac{x^n}{n!}$ cv normalement sur tout $[-A,A]$

Abus! c'est $\sum f_n$ où $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{n!}$

Et sur $]-\infty,+\infty[$?

f_n non bornée sur $]-\infty,+\infty[$, $\|f_n\|_\infty^{]-\infty,+\infty[}$ n'existe pas.

Exemple. Étudier la convergence normale sur $[0,1]$ de $\sum f_n$ où $f_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{n}$.

$\forall x \in [0,1] \quad |f_n(x)| = \frac{x^n}{n}$

$\leq \frac{1}{n}$ indép de x

t.g d'une série divergente.

en fait $|f_n(1)| = \frac{1}{n}$

donc $\max\limits_{t \in [0,1]} |f_n(t)| = \frac{1}{n}$

donc $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$

or $\sum \frac{1}{n}$ diverge donc $\sum f_n$ ne cv pas normalement sur $[0,1]$

Rmq : il y a cv simple de $\sum f_n$ sur $[0,1]$

Propriété :

Soit $\sum f_n$ une série de fct : $I \longrightarrow \mathbb{K}$

Si $\sum f_n$ cv normalement sur I

alors $\sum f_n$ cv simplement sur I

c'est une cv simple absolue.

Preuves

Soit $x \in I$ fixé.

$$|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty$$

t.g d'une série cv par hyp

donc $\sum f_n(x)$ cv absolument par comparaison.

Ainsi $\sum f_n$ cv simplement (absolument) sur I.

c'est une notion délicate.

1.2 Convergence uniforme

Définition. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions : $I \to \mathbb{K}$. On dit que $\sum f_n$ **converge uniformément sur** I si et seulement si la suite de fonctions $(S_n)_n$ de ses sommes partielles converge uniformément sur I.

$S_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$

$\|S - S_n\|_\infty^I \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Remarque. *On peut quantifier la définition par :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ t.q. } \forall n \geqslant N, \forall x \in I, \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leqslant \varepsilon$$

Proposition. La convergence uniforme d'une série de fonctions implique sa convergence simple.

On suppose $\sum f_n$ cv uniformément sur I.

ie $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} S$

donc $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} S$

en part : $\forall x \in I \quad \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) = S(x)$

donc $\sum f_k(x)$ converge

ie $\sum f_k$ converge simplement sur I.

Théorème.

$\sum f_n$ converge uniformément sur I si et seulement si :

$$\begin{cases} \sum f_n \text{ converge simplement sur } I \\ (R_n)_n \text{ converge uniformément sur } I \text{ vers } 0 \end{cases}$$

Preuve : ce n'est qu'une reformulation de la déf.

§12

Remarque. ~~Il est difficile de démontrer la convergence uniforme sans calculer explicitement la somme $S(x)$, sauf à avoir recours dans certains cas au TSSA.~~

En général on ne sait pas démontrer la cv uniforme.

On peut essayer : → de montrer la cv normale (c'est plus facile)

→ utiliser le th des séries alternées

→ expliciter $S(x)$ ou $R_n(x)$

1.4 Lien entre les différents modes de convergence

Proposition. La convergence uniforme implique la convergence simple. ✓

Proposition. La convergence normale implique la convergence uniforme.

preuve :

On suppose que $\sum f_n$ cv normalement sur I.

On a déjà démontré $\sum f_n$ cv simplement (absolument)

On peut noter $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ sa somme.

On veut montrer que la cv est uniforme :

$$\forall x \in I \quad |R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right|$$

$$\leq \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)|}_{\text{reste d'une série cv car } \sum f_k(x) \text{ cv absolument}}$$

$$\leq \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty}_{\text{indép de } x}$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad \text{comme reste d'une série convergente.}$$

donc $(R_n)_n$ cv uniformément vers 0, donc $\sum f_n$ cv unif.

Exemple. Étudier la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur l'intervalle précisé.

1. $f_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^n}{n}$, $I = [0,1]$.

• Étude de la cv simple Soit $x \in [0,1]$ fixé.

1er cas : $x \neq 1$ $|f_n(x)| = \dfrac{x^n}{n}$

$\leq x^n$ t.g série abs cv

donc $\sum f_n(x)$ converge (abs)

2e cas : $x = 1$ $f_n(1) = (-1)^n \cdot \dfrac{1}{n}$

t.g série cv (harmonique alternée)

Donc : $\sum f_n$ cv simplement sur $[0,1]$

• Étude de la cv normale

$[\dots]$ $\|f_n\|_\infty^{[0,1]} = \dfrac{1}{n}$

pas de cv normale.

• Étude de la cv uniforme.

On a déjà la cv simple de $\sum f_n$.

Mque $R_n \xrightarrow[n \to +\infty]{CU} 0$

$\forall x \in [0,1]$

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k} \right|$$

Pour $x \in [0,1]$, $\left(\dfrac{x^k}{k}\right)_k$ est positive,

décroissante, de limite nulle donc

par le th des séries alternées, $\sum (-1)^k \frac{x^k}{k}$ cv

et $|R_n(x)| \leq \left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|$

$\leq \frac{1}{n+1}$ indép de x

$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} 0$

Donc $\sum f_n$ cv uniformément sur $[0,1]$.

2. $f_n(x) = xe^{-nx^2}$, $I = \mathbb{R}_+$

• Étude de la cv simple.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$ fixé.

1er cas : si $x=0$ $f_n(0)=0$ t.g série cv

2e cas : si $x>0$ $f_n(x) = x e^{-nx^2}$

série géom. de raison $e^{-x^2} \in]-1,1[$

donc série convergente.

• Étude de la cv normale cv ? $\sum \|f_n\|_\infty$?

$|f_n(x)| = x e^{-nx^2}$

$0 \leq \left|f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-1} \leq \|f_n\|_\infty$

t.g série divergente

donc par minoration, $\sum \|f_n\|_\infty$ diverge

donc $\sum f_n$ ne cv pas normalement.

Zut !

- Étude de la cv uniforme.

  $*$ $\sum f_n$ cv simplement sur $[0,+\infty[$

  $*$ Mque $R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} 0$

$\forall x \in [0,+\infty[$

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} x e^{-kx^2}\right|$$

somme géométrique

$$= \begin{cases} x e^{-(n+1)x^2} \cdot \dfrac{1}{1-e^{-x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$= x e^{-nx^2} \cdot \frac{1}{e^{x^2}-1}$$

3. $f_n(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n+x^2}$, $I = \mathbb{R}$.

Proposition. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I, alors la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers $\widetilde{0}$ sur I.

Proposition. Si $\sum f_n$ et $\sum g_n$ convergent uniformément sur I, et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors $\sum(\lambda f_n + \mu g_n)$ converge uniformément sur I.