Pour lundi 7h30. Ex à rédiger au choix :

22.13, 22.14, 53.16, 53.17

Pour moi : 53.22, 53.23 et $\begin{cases} 22.7 & \text{MPI} \\ 22.23 & \text{MPI*} \end{cases}$

5 Transfert de continuité par convergence uniforme

Théorème. transfert de continuité

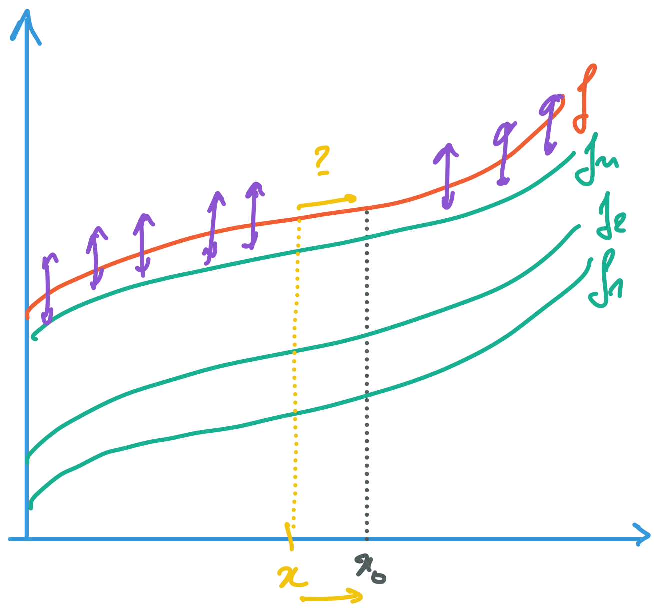
> Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur I.
> Si :
>
> - pour tout n, f_n est continue sur I,
> - $(f_n)_n$ converge uniformément sur I vers f,
>
> alors :
>
> - f est continue sur I.

Remarque.

- *La convergence simple ne suffit pas pour justifier la continuité de f, comme le montre l'exemple des fonctions $f_n : x \in [0,1] \mapsto x^n$.*
- *La continuité des f_n et de f ne suffit pas à justifier la convergence uniforme, comme le montre l'exemple des fonctions $f_n : x \in [0,1] \mapsto n^2 x(1-x^2)^n$.*

Preuve : Soit $x_0 \in I$, Mq f est continue en x_0.

On revient à la définition avec ε.



idée $|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)|$

$\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$

$\leq \|f - f_n\|_\infty + |f_n(x) - f_n(x_0)| + \|f_n - f\|_\infty$

Soit $\varepsilon > 0$

Par déf de $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ avec $\frac{\varepsilon}{3}$

donc $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$, $\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}$

en part $\|f_N - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}$

Par déf de f_N est continue en x_0 avec $\frac{\varepsilon}{3}$

donc $\exists \eta > 0$ tq $\forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$,

$|f_N(x) - f_N(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

Alors : $\forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$,

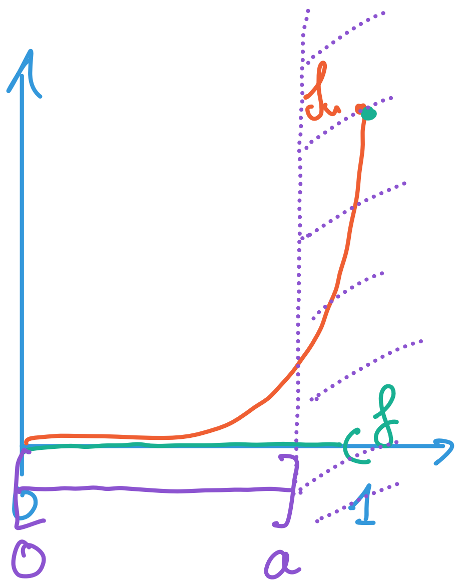
$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\
&\leq \|f - f_N\|_\infty + |f_N(x) - f_N(x_0)| + \|f_N - f\|_\infty \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

Ainsi : $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$

Corollaire. Si $(f_n)_n$ converge simplement sur I vers f, que les f_n sont continues sur I mais que f n'est pas continue sur I, alors la convergence n'est pas uniforme sur I.

Ex : $x \longmapsto x^n$ sur $[0,1]$

limite simple $x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x<1 \\ 1 & \text{si } x=1 \end{cases}$



Sur $[0,a] \subset [0,1[$

- $f_n : x \longmapsto x^n$ sont continues sur $[0,a]$
- à x fixé dans $[0,a]$,

$$x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc $(f_n)_n$ cv simplement sur $[0,a]$ vers $(x \mapsto 0)$

- cv uniforme sur $[0,a]$:

$\forall x \in [0,a] \quad |x^n - 0| = x^n$

$\leq a^n$ indép de x

$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

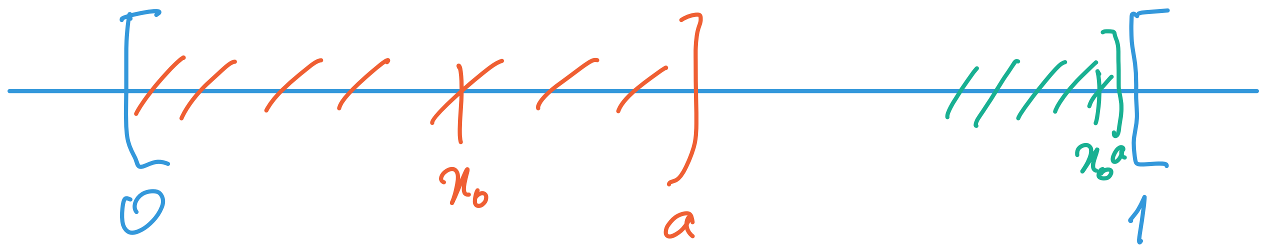
donc $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CV} (x \mapsto 0)$ sur $[0, a]$

On applique le th "transfert de continuité" :

- th $x \mapsto x^n$ est continue sur $[0,a]$
- $(f_n)_n$ cv unif sur $[0,a]$ vers $(x \mapsto 0)$

Donc $(x \mapsto 0)$ est continue sur tout $[0,a] \subset [0,1[$

donc continue sur $[0,1[$



cont sur $[0,1[$ = continue en tout $x_0 \in [0,1[$

Et pourtant ! $(f_n)_n$ ne cv pas uniformément vers $(x \mapsto 0)$ sur $[0,1[$

(cf $x_n = 1 - \frac{1}{n}$)

Retenir : la continuité est une notion locale

la cv uniforme n'est pas locale

Raisonnement classique. Si $(f_n)_n$ converge simplement sur I vers f, que les f_n sont continues sur I et qu'il y a convergence uniforme sur tout segment $[a, b]$ de I, alors f est continue sur tout $[a, b] \subset I$ donc sur I.

Remarque. *Ce résultat, qui exploite le caractère local de la continuité, s'adapte aussi lorsque la convergence uniforme est vérifiée sur une famille d'intervalles adaptés à la situation.*

6 Théorème de la double limite

Théorème de la double limite.

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur I et a un point de I ou une extrémité éventuellement infinie de I.
Si :

- pour tout n, $f_n(x)$ admet une limite finie ℓ_n lorsque $x \to a$,
- $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur I,

alors :

- la suite $(\ell_n)_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$,
- $f(x)$ admet une limite lorsque $x \to a$,
- cette limite est égale à ℓ.

Preuve. La démonstration est hors programme. □

Remarque. *On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :*

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right)$$

qui explique le nom du théorème. Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes d'existence des limites envisagées et de mode de convergence de la suite de fonctions.

Exemple. On considère la suite de fonctions $(f_n)_n$ définie par :

$$f_n(x) = \frac{nx^2 e^{-nx}}{1 - e^{-x^2}}$$

1. Déterminer la limite de f_n en 0.
2. Étudier la convergence simple de $(f_n)_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Utiliser le théorème de la double limite pour montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_n$ sur tout $[a, +\infty[$, $a > 0$.

1 Soit $n \in \mathbb{N}$

Au voisinage de $x \to 0$:

$$f_n(x) = \frac{n x^2 e^{-nx}}{1 - e^{-x^2}}$$

$$\sim \frac{n x^2 \, 1}{x^2}$$

Car $e^{-x^2} = 1 - x^2 + o(x^2)$

$$= n$$

$$\xrightarrow[x\to 0]{} n$$ ← c'est ℓ_n

② Soit $x>0$ fixé

Au voisinage de $n \to +\infty$

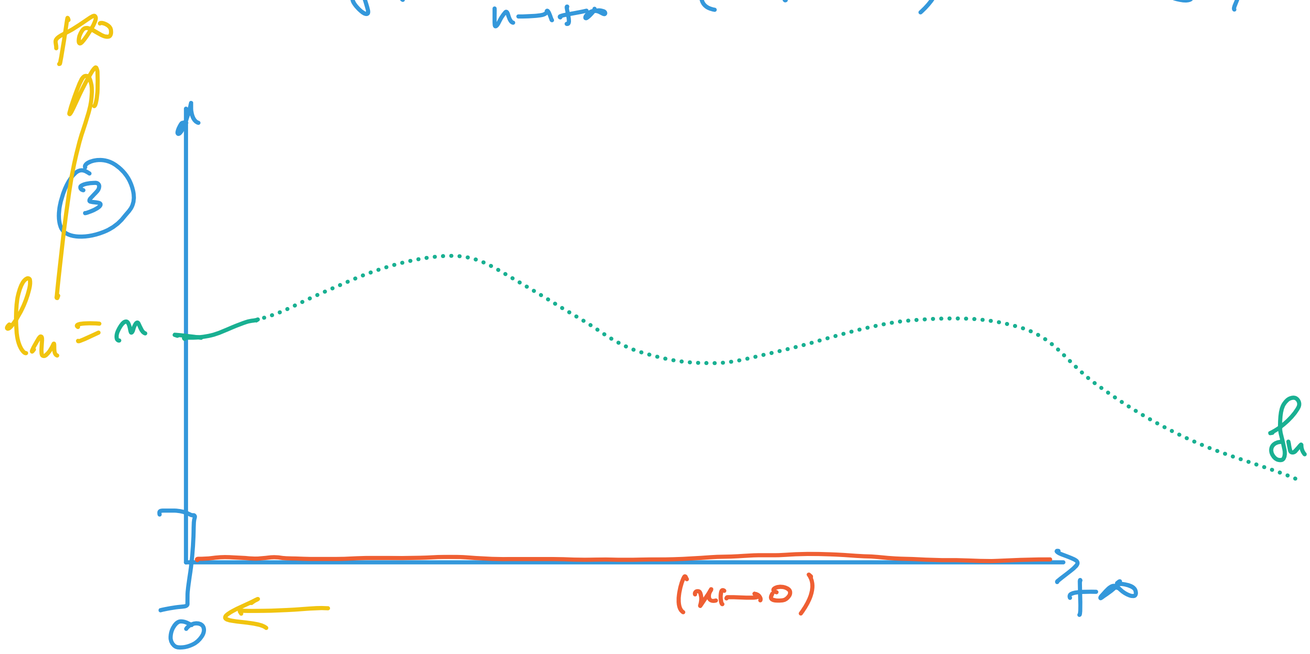
$$f_n(x) = \frac{n x^2 e^{-nx}}{1-e^{-x^2}}$$

$$= \frac{x^2}{1-e^{-x^2}} \; \frac{n}{e^{nx}}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \text{car} \quad n \in \underset{n\to+\infty}{o}(e^{nx})$$

Donc $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} (x \mapsto 0)$ sur $]0,+\infty[$

③



Par double limite, si la convergence est uniforme,

$(\ell_n)_n$ converge vers la limite de $(x \mapsto 0)$ en 0

ie $n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Contradiction

Donc la cv n'est pas uniforme.

(b) Soit $[a, b] \subset]0, +\infty[$

Soit $a > 0$

Mq $(f_n)_n$ cv uniformément vers $(x \mapsto 0)$ sur $[a, b]$

$\forall x \in [a, b]$

$$|f_n(x) - 0| = \frac{n x^2 e^{-nx}}{1 - e^{-x^2}}$$

$$\leq \frac{n b^2 e^{-na}}{1 - e^{-a^2}} \quad \text{car } x \in [a, b]$$

indép de x

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

donc la cv est uniforme sur $[a, b]$.

(4) Soit $[a,+\infty[\ \subset\ ]0,+\infty[$

Soit $a>0$

Mque $(f_n)_n$ cv uniformément vers $(x \mapsto 0)$ sur $[a,+\infty[$.

$\forall x \in [a,+\infty[$

$$|f_n(x) - 0| = \frac{n x^2 e^{-nx}}{1-e^{-x^2}}$$

$$\leq \frac{n x^2 e^{-nx}}{1-e^{-a^2}}$$

Ah ! $\varphi_n : x \mapsto n x^2 e^{-nx}$ est une cloche !

$$\varphi_n'(x) = n 2x e^{-nx} + n x^2 (-n) e^{-nx}$$

$$= n x e^{-nx}(2 - nx)$$

$$= -n^2 x e^{-nx}\left(x - \frac{2}{n}\right)$$

pour $n \geq \lfloor \frac{2}{a} \rfloor + 1$

x	0	$\frac{2}{n}$	a	$\cancel{\frac{2}{n}}$	$+\infty$
φ_n'	$+$	0		$-$	
φ_n	$\nearrow$		$\varphi_n(a)$	$\searrow$	

$\forall x \in [a,+\infty[,\quad \varphi_n(x) \leq \varphi_n(a)$ pour $n \geq n_0$

$$= n a^2 e^{-na}$$

Ainsi :

$$|f_n(x) - 0| \leq \frac{n a^2 e^{-na}}{1 - e^{-a^2}} \quad \text{pour } n \geq n_0$$

indép. de x

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

donc la cv est uniforme sur $[a, +\infty[$

Rmq : cv unif sur tout $[a, b] \subset]0, +\infty[$

cv unif sur tout $[a, +\infty[\subset]0, +\infty[$

pas cv unif sur $]0, +\infty[$.

4.2 Convergence uniforme sur tout segment

Définition. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions $I : \mathbb{K}$ et $f : I \to \mathbb{K}$.
On dit que $(f_n)_n$ **converge vers** f **uniformément sur tout segment de** I si et seulement si pour tout segment $[a, b] \subset I$, $(f_{n|[a,b]})_n$ converge uniformément vers $f_{|[a,b]}$ sur $[a, b]$.

Exemple.

1. Utiliser la formule de Taylor avec reste-intégral pour montrer : $t - \dfrac{t^2}{2} \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$ pour tout $t \geqslant 0$.
2. Étudier la convergence uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$ de la suite de fonctions définies par :
$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

7 Intégration

7.1 Intégration sur un segment/primitivation et convergence uniforme

Lemme. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I et $a \in I$.
Si :

- $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment $K \subset I$,
- les f_n sont continues.

alors, en notant $F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$ et $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$,

- $(F_n)_n$ converge uniformément vers F sur tout segment de I.

Preuve.

□

Remarque. *Ainsi, la convergence uniforme sur tout segment se transmet par primitivation, à condition de prendre les primitives qui s'annulent toutes en un même point a donné.*

Preuve: Soit $K = [c, d] \subset I$

$\forall x \in [c, d]$

$$|F_n(x) - F(x)| = \left|\int_a^x f_n(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right|$$

si $x \geq a$

$$= \left|\int_a^x f_n(t) - f(t)\,dt\right|$$

$$\leq \int_a^x |f_n(t) - f(t)|\,dt$$

$$\leq \int_a^x \|f_n - f\|_\infty^K\,dt$$

$$\sup_{t \in K} |f_n(t) - f(t)|$$

$$= \|f_n - f\|_\infty^K (x - a)$$

$$\leq \|f_n - f\|_\infty^K (d - c)$$

si $x \leq a$

$$= \left| \int_x^a f_n(t) - f(t) \, dt \right|$$

$$\leq \cdots$$

$$\leq \|f_n - f\|_\infty^K (d-c)$$

Bref : $\forall x \in K$

$$|F_n(x) - F(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty^K (d-c) \quad \text{indep de } x$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad \text{car } f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{CU} f \text{ sur } K$$

donc $F_n \xrightarrow[n \to +\infty]{CU} F$ sur K.

Théorème d'interversion limite-intégrale par cv uniforme sur un segment.

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur un segment $[a,b]$.
Si :

- $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$,
- $[a,b]$ est un segment,
- les f_n sont continues.

alors :

- la suite $\left(\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)_n$ converge,
- $\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

Remarque. *On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

qui explique le nom du théorème. Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes d'existence des limites envisagées et de mode de convergence de la suite de fonctions.

Preuve :

$$\left| \int_a^b f_n(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt \right|$$

$$= \left| \int_a^b f_n(t) - f(t)\;dt \right|$$

$$\leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\,dt$$

$$\leq \int_a^b \|f_n - f\|_\infty\,dt$$

$$= \|f_n - f\|_\infty\,(b-a)$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Remarque. *Le théorème de convergence dominée étudié au § 7.2 fournit un autre critère pour intégrer la limite d'une suite de fonctions, y compris lorsque l'intégrale est généralisée.*

Exemple. Étudier la convergence de la suite de terme général :

$$u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{n\sin\left(\frac{t^2}{n}\right)+1}$$

On donne l'encadrement $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x$.

On pose, pour $t \in [0,1]$, $f_n(t) = \dfrac{1}{n\sin\left(\frac{t^2}{n}\right)+1}$

- <u>Étude de la cv simple</u>

Soit $t \in [0,1]$ fixé.

Au voisinage de $n \to +\infty$

$$f_n(t) = \frac{1}{n\left(\frac{t^2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + 1}$$

$$= \frac{1}{t^2+1 \quad + o(1)}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{t^2+1}$$

<u>Donc</u> $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{cs} f : t \longmapsto \dfrac{1}{t^2+1}$

- <u>Étude de la cv uniforme</u>

$\forall t \in [0,1]$

$$|f_n(t) - f(t)| = \left| \frac{1}{n\sin\frac{t^2}{n} + 1} - \frac{1}{t^2+1} \right|$$

$$= \frac{\left| t^2 - n \sin \frac{t^2}{n} \right|}{\underbrace{\left| n \sin \frac{t^2}{n} + 1 \right|}_{\text{pour } t \in [0,1],\ \sin \frac{t^2}{n} \geq 0} (t^2+1)}$$

$$-\frac{x^3}{6} \leq \sin x - x \leq 0$$

$$\left| \sin \frac{t^2}{n} - \frac{t^2}{n} \right| \leq \frac{t^6}{6n^3}$$

$$= \frac{\overbrace{\left| t^2 - n \sin \frac{t^2}{n} \right|}}{\left(n \sin \frac{t^2}{n} + 1 \right)(t^2+1)}$$

$t \in [0,1]$

$$\leq \frac{\frac{t^6}{6n^2}}{\left(n \sin \frac{t^2}{n} + 1 \right)(t^2+1)}$$

$$\leq \frac{\frac{1}{6n^2}}{(0+1)(0^2+1)}$$

$$= \frac{1}{6n^2} \qquad \text{indép de } t$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

<u>Donc $(f_n)_n$ cv unif. vers f sur $[0,1]$</u>

- Les f_n sont <u>continues</u> sur $[0,1]$ et on <u>segment</u>

donc

$$\int_0^1 f_n(t)\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$= \left[\operatorname{Arctan} t\right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{4}$$