3 Interlude : la norme infinie

L'étude plus systèmatique des normes sera faite dans un chapitre dédié. On peut déjà donner la définition, où E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel :

Définition. On appelle **norme** sur E une application $N : E \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$x \mapsto N(x) = \|x\|$

- $\forall x \in E,\ N(x) \geqslant 0$ *positivité*
- $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ *homogénéité*
- $\forall x, y \in E,\ N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$ *inégalité triangulaire*
- $\forall x n E,\ N(x) = 0 \implies x = 0$ *séparation*

Pour A partie non vide de $\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathcal{B}(A, \mathbb{K})$ des fonctions $A \to \mathbb{K}$ bornées est un espace vectoriel, que l'on peut munir d'une norme en définissant :

Définition. Pour $f \in \mathcal{B}(A, \mathbb{K})$, on note :

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{x \in A} |f(x)|$$

val. absolue.

Proposition. $\|\cdot\|_\infty$ est une norme.

Preuve. □

Remarque. *Il importe de savoir rédiger l'inégalité triangulaire.*

- $\|\cdot\|_\infty$ existe bien.

  Si f est bornée, $\{|f(x)|,\ x \in A\}$ admet une borne sup comme partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée.

- positivité

  Soit $f \in \mathcal{B}(A, \mathbb{K})$.

  $\forall x \in A,\quad |f(x)| \geq 0$ donc $\|f\|_\infty \geq 0$

  (prenons $x \in A$, $\quad 0 \leq |f(x)| \leq \|f\|_\infty$)

- homogénéité

  $\longrightarrow$ cf cours de topologie

- séparation.

  Soit $f \in \mathcal{B}(A, \mathbb{K})$ tq $\|f\|_\infty = 0$

ie $\sup_{x \in A} |f(x)| = 0$

Mq $f = 0$ ie $\forall x \in A \ f(x) = 0$

Pour $x \in A$, $0 \leq |f(x)| \leq \|f\|_\infty = 0$

donc $f(x) = 0$

- inég triangulaire.

Soit $f, g \in \mathcal{B}(A, \mathbb{K})$

Mq $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

ie $\sup_{x \in A} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x \in A} |f(x)| + \sup_{x \in A} |g(x)|$

$$\cancel{\sup_A |f|}$$

Rmq : Si on veut majorer une borne Sup, on majore uniformément son sup ponde.

On a :

$\forall x \in A \quad |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$

$\leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

indépendant de x

(Comme $\|f+g\|_\infty$ est le plus petit des majorants,)

$\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Ex : $\| \cos - \sin \|_\infty = ?$

Corollaire. $\| \cdot \|_\infty$ est aussi une norme sur l'espace $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$ des fonctions continues sur le segment $[a,b]$.

Preuve. Par le théorème des bornes atteintes (fonctions continues sur un segment), $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K}) \subset \mathcal{B}([a,b],\mathbb{K})$. $\square$

4 Convergence uniforme

Définition. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction. On dit que $(f_n)_n$ **converge uniformément sur** I vers f si et seulement si la suite numérique $(\|f_n - f\|_\infty)_n$ converge vers 0. La fonction f est alors appelée **limite uniforme** de $(f_n)_n$.

$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f$ ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ tq $\forall n \geq N$

$\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$

$\| f_n - f \|_\infty = \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|$

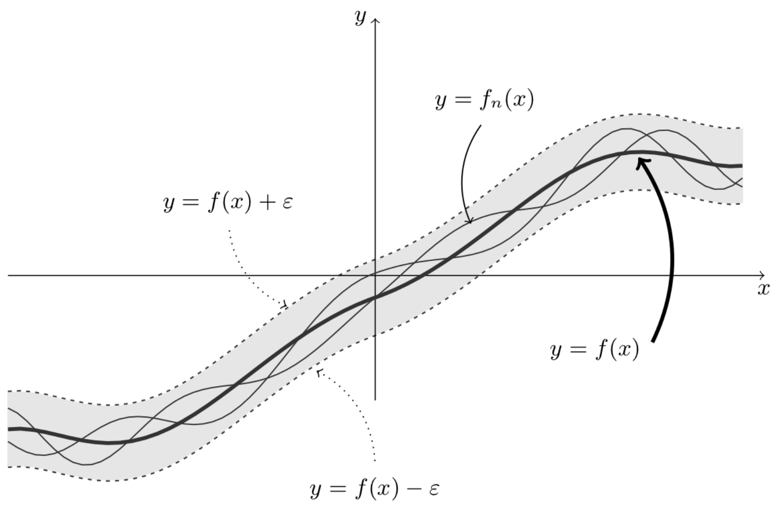
Remarque.

- *Pour que cette définition ait un sens, on doit naturellement supposer que, au moins à partir d'un certain rang, la fonction $f - f_n$ soit bornée sur I.*
- *On trouve parfois la notation $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f$.*
- *On peut quantifier la proposition « $(f_n)_n$ converge uniformément vers f » :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geqslant N,\ \forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

Dans cette quantification, l'indice N à partir duquel $f_n(x)$ approche $f(x)$ à ε près est indépendant de x. C'est le même pour tout x, on dit qu'il est uniforme, ce qui donne son nom à ce mode de convergence de la suite de fonctions.

Interprétation graphique.



Théorème.

La convergence uniforme implique la convergence simple.

Remarque.

- *La réciproque est fausse.*
- *Si une suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément, sa limite uniforme coïncide avec sa limite simple.*

Preuve : On suppose que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f$ ie $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[+\infty]{} 0$

Mque $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} f$ ie $\forall x$ fixé $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$

Soit $x \in I$ fixé.

$$0 \leq |f_n(x) - f(x)| \leq \underbrace{\|f_n - f\|_\infty}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

donc $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$

donc $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} f$

Étude pratique pour montrer la convergence uniforme.

- On commence par déterminer la limite simple de $(f_n)_n$, notée f.
  Une représentation graphique peut aider.
- On cherche à majorer $|f_n(x) - f(x)|$ **indépendamment** de x par une suite qui converge vers 0.
- La recherche précise de $\|f_n - f\|_\infty$ peut se faire par l'étude des variations de $|f_n - f|$.

Étude pratique pour montrer la non-convergence uniforme.

- On commence par déterminer la limite simple de $(f_n)_n$, notée f.
  Une représentation graphique peut aider.
- S'il n'existe pas de rang à partir duquel $f_n - f$ est bornée, la convergence ne peut pas être uniforme.
- On peut montrer le non-transfert à la limite d'une propriété (voir § 5 et § 7).
- On exhibe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de I telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_n$ ne converge pas vers 0.

mque $\|f_n - f\|_\infty \not\to 0$

minorer $\|f_n - f\|_\infty$ par qqch $\not\to 0$

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$$

Exemple. Étudier la convergence uniforme des trois suites de fonctions :

1. $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ où $f_n(x) = x^n$

- $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} f : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

- M1 les f_n sont continues et f n'est pas continue donc la cv n'est pas uniforme. (§ 5)

  M2 Démontrons la non cv uniforme.

  Exhibons $(x_n)_n$ tq $|f_n(x_n) - f(x_n)| \not\to 0$

Posons $x_n = 1 - \frac{1}{n}$

$$\left| f_n\left(1 - \frac{1}{n}\right) - f\left(1 - \frac{1}{n}\right) \right|$$
$$= \left| \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n - 0 \right|$$
$$= e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)}$$
$$= e^{n\left(-\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$$
$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1} \neq 0$$

Or $|f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \|f_n - f\|_\infty$

donc $\|f_n - f\|_\infty \not\to 0$

donc la cv n'est pas uniforme.

2. $g_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ où $g_n(x) = \dfrac{1}{n+x^2}$

- $g_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} \overbrace{(x \mapsto 0)}^{\text{notée } g}$ H $\tilde{O}$ $\cancel{\otimes}$

- $$\left| g_n(x) - g(x) \right| = \left| \frac{1}{n+x^2} - 0 \right|$$
$$= \frac{1}{n+x^2}$$
$$\le \frac{1}{n}$$ indépendant de x
$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc $\|g_n - g\|_\infty \le \dfrac{1}{n}$

donc $g_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} g$

3. $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ où $h_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } |x| \leqslant \frac{1}{n} \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$

$h_n - h$ non bornée

donc $\|h_n - h\|_\infty$ n'existe même pas !

4.1 Propriétés

Proposition. Si $B \subset I$ et si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur B.

Proposition. Si les suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément vers f et g sur I et si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors la suite de fonctions $(\lambda f_n + \mu g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\lambda f + \mu g$ sur I.