Présentation

Ce devoir est constitué de deux problèmes indépendants.

Problème 1

Rappels

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe lorsque

$$\forall (t,x,y) \in [0,1] \times I \times I \quad f(tx+(1-t)y) \leqslant tf(x)+(1-t)f(y)$$

Si f est de classe C^1, alors f est convexe si et seulement si f' est croissante.
Si f est de classe C^2, alors f est convexe si et seulement si f'' est positive.

Ce problème aborde l'étude des restes de certaines séries. Les différentes parties sont indépendantes

Comme ça

Comme ça.

Partie I : Restes des séries géométriques

1 Si $(a,q) \in \mathbb{R}^2$, avec $a \neq 0$, à quelle condition (nécessaire et suffisante) la série $\sum_{n \geqslant 0} aq^n$ converge-t-elle ?

$|q|<1$ "géométrique"

2 On suppose la condition précédente vérifiée. On définit, si $n \geqslant 0$, $u_n = aq^n$ et $r_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$. Trouver un réel λ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad r_n = \lambda u_n$$

3 Dans cette question, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels telle que la série $\sum u_n$ converge. On définit alors, si $n \geqslant 0$, $r_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad r_n = \lambda u_n$$

(a) Donner une expression de u_n à l'aide de r_n et r_{n+1}.

(b) Trouver deux nombres a et q tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = aq^n$$

Partie II : Un exemple de calcul explicite du reste

4 Démontrer que la série de terme général $a_n = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{2n}{n^4+n^2+2}\right)$ est convergente.

$a_n \sim \ldots$
$\sim \ldots$
$\sim \dfrac{2}{n^3}$

5 Trouver deux réels a et b tels que les polynômes $P = X^2+aX+1$ et $Q = X^2+bX+1$ vérifient :

$$\begin{cases} P(X)-Q(X) = 2X \\ P(X)Q(X) = X^4+X^2+1 \end{cases}$$

$\boxed{6}$ Etablir que, pour tout couple (x, y) de nombres réels positifs ou nuls, on a :

$$\underbrace{\operatorname{Arctan}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)}_{\alpha} = \underbrace{\operatorname{Arctan}(x) - \operatorname{Arctan}(y)}_{\beta} \ .$$

$\tan(\alpha) = \tan(\beta)$

On pourra commencer par vérifier que les deux membres de cette égalité sont dans $]-\pi/2, \pi/2[$.

$\boxed{7}$ Justifier, pour $x > 0$:

$$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

"intervalle".

$\boxed{8}$ Déduire des questions précédentes que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} a_k = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(n^2 - n + 1)$$

télescopage

$\boxed{9}$ Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{k=n}^{+\infty} a_k\right)$ converge.

Partie III : Autre exemple de calcul explicite du reste

On admet que, pour tout réel x,

$$\exp(x) = e^x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots$

Soit x un nombre réel.

$\boxed{10}$ Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ converge. Quelle est sa somme ?

$\boxed{11}$ Etablir par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}_*$:

$$\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!} = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n-2}}{(2n-2)!}\operatorname{sh} t \ \mathrm{d}t$$

par parties, IPP, φ

Partie IV : Comparaison à une intégrale

Si f est continue positive sur $[a, +\infty[$, on note

$$\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right) \in [0, +\infty[\cup\{+\infty\}$$

$\boxed{12}$ Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln n}{n^x}$ est convergente si et seulement si x est strictement supérieur à 1.

$\boxed{13}$ Dans cette question, on suppose $x > 1$. Pour $n \in \mathbb{N}_*$ on note $r_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{\ln k}{k^x}$.

(a) Pour tout réel $a \geqslant 1$, justifier l'égalité :

$$\int_a^{+\infty} \frac{\ln t}{t^x} \mathrm{d}t = \frac{a^{1-x}(1+(x-1)\ln a)}{(x-1)^2} .$$

(b) Montrer que la fonction $t \longmapsto \dfrac{\ln t}{t^x}$ est décroissante sur $[3, +\infty[$.

$\cancel{f'(t) \geqslant 0} \Leftrightarrow \dots$

(c) Établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 4, la double inégalité :

$$\int_n^{+\infty} \frac{\ln t}{t^x} \mathrm{d}t \leqslant r_n \leqslant \int_{n-1}^{+\infty} \frac{\ln t}{t^x} \mathrm{d}t$$

(d) En déduire que r_n est équivalent à $\dfrac{\ln n}{(x-1)n^{x-1}}$ quand n tend vers $+\infty$.

$\ln(n-1) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$ à justif.

Partie V : Restes de séries alternées

Dans cette partie, f désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, décroissante et convexe, à valeurs strictement positives et de limite nulle en $+\infty$.

Pour tout entier positif ou nul n, on pose $u_n = (-1)^n f(n)$.

$\boxed{14}$ Jusfifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} u_n$.

TSSA TSCSA Ks séries alternées.
CSSA TSA

Dans la suite de cette partie, pour tout entier positif ou nul n on pose $r_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} u_k$.

$\boxed{15}$ Démontrer que, pour tout entier positif ou nul n, on a :

- $|r_n| = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p f(n+p)$
- $0 \leqslant |r_n| - |r_{n+1}| \leqslant f(n) - f(n+1)$.

$\boxed{16}$ Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} r_n$ est convergente.

$\boxed{17}$ (a) Etablir, pour tout réel positif ou nul t, la double inégalité :

$$0 \leqslant f(t) - f(t+1) \leqslant -f'(t) .$$

(b) Démontrer que, si $f'(t) = \underset{t \to +\infty}{\mathrm{o}}\big(f(t)\big)$, alors r_n est équivalent à $\dfrac{u_n}{2}$ quand n tend vers l'infini (on pourra calculer $|r_n| + |r_{n+1}|$).

$\boxed{18}$ (a) Pour quelles valeurs du réel x la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n \ln n}{n^x}$ est-elle convergente ?

(b) Pour ces valeurs, déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k \ln k}{k^x}$ quand n tend vers l'infini.

$\boxed{19}$ (a) Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ est convergente.

$\dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n} \sim \dfrac{(-1)^n}{n}$

(b) La série de terme général $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+(-1)^k}$ est-elle convergente ?

$\dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n} = \dfrac{(-1)^n}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

Pour ve : 53.4, 53.13

Les colles de math.

Son travail personnel

Suites de fonctions numériques

1 Quelques exemples

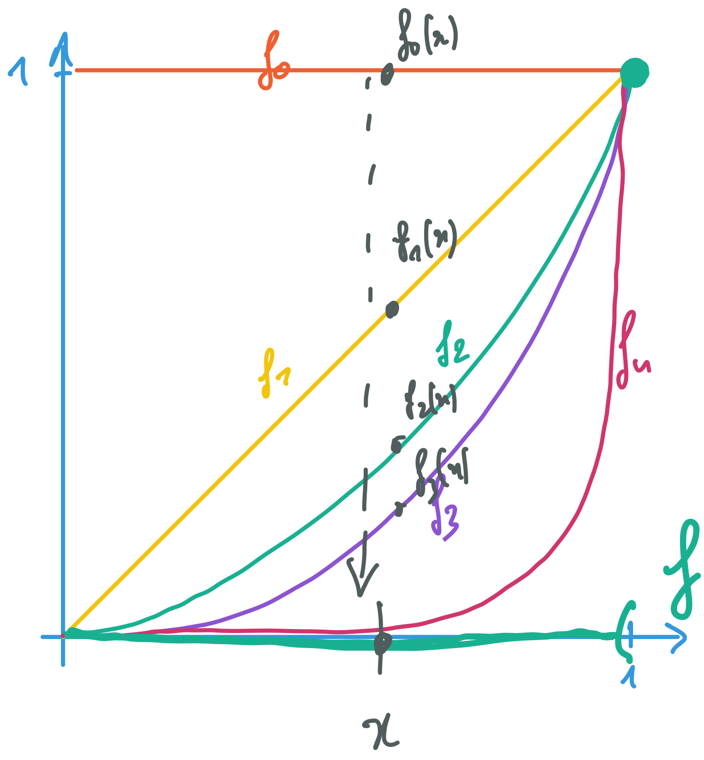
Exemple. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$f_n : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{array}$$

1. Représenter quelques fonctions f_n.

2. Est-ce que $(f_n(x))_n$ admet une limite ?

3. Continuité ?



$$f_n(x) = x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \left| \begin{array}{l} 0 \text{ si } x<1 \\ 1 \text{ si } x=1 \end{array} \right.$$

$$f : x \longmapsto \left| \begin{array}{l} 0 \text{ si } x<1 \\ 1 \text{ si } x=1 \end{array} \right.$$

$$\cancel{f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f}$$

Exemple. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$f_n : \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & n^2 x(1-x^2)^n \end{array}$$

1. Représenter quelques fonctions f_n.
2. Est-ce que $(f_n(x))_n$ admet une limite ?
3. Intégrale sur $[0,1]$?

$$n^2 \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^n$$

$$f_n'(x) = n^2(1-x^2)^n + n^2 x\, n(-2x)(1-x^2)^{n-1}$$

$$= n^2(1-x^2)^{n-1}\left(1-x^2-2nx^2\right)$$

$$= n^2(1-x^2)^{n-1}(1+2n)(-)\left(x-\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)$$

D'où le tableau de variations $(n \geq 2)$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$		1
f_n'	n^2	$+$	0	$-$	0
f_n	0	$\nearrow$	α_n	$\searrow$	0

avec $\alpha_n = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right) = n^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^n$

$$= \frac{n^2}{\sqrt{2n+1}}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n$$

$$e^{n\ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right)}$$

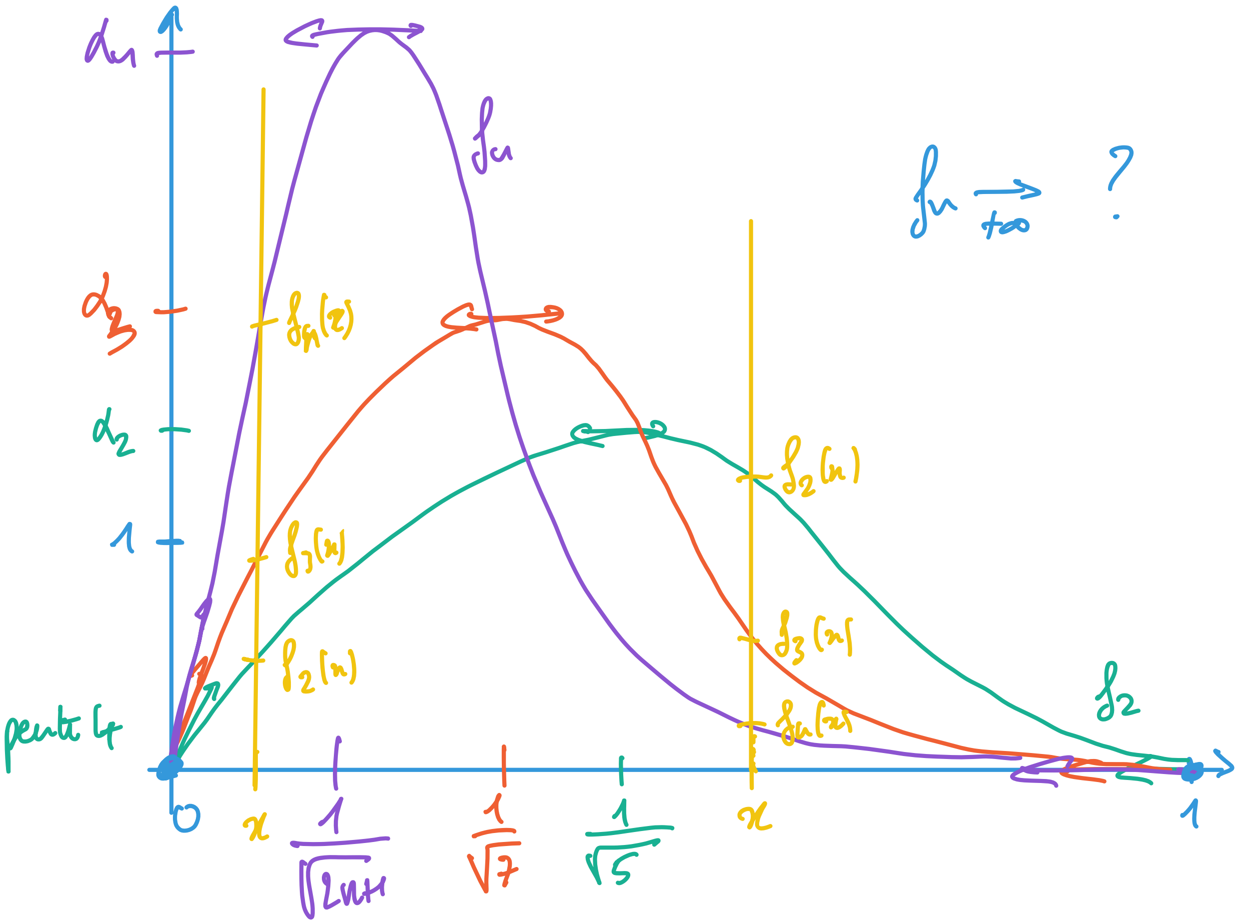
$$= e^{-n\ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right)}$$

$$= e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)}$$

$$= e^{-n\left(\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$$

$$\xrightarrow[+\infty]{} e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\underset{+\infty}{\sim} n^{3/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2e}}$$



$f_n \xrightarrow[+\infty]{} ?$

<u>Fixons $x \in [0,1]$.</u>

$$f_n(x) = n^2 x (1-x^2)^n$$

<u>1er cas:</u> $x=0$, $x=1$

$$f_n(x) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

<u>2e cas:</u> $x \in]0,1[$

$$e^{n\ln(1-x^2)}$$

$$f_n(x) = n^2 x (1-x^2)^n$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$ par prépondérance de l'exp sur n^2

$$\cancel{f_n \xrightarrow[+\infty]{} 0}$$

On calcule :

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 n^2 x (1-x^2)^n \,dx$$

$$= \left[\frac{n^2}{n+1} \cdot \frac{1}{-2} (1-x^2)^{n+1} \right]_0^1$$

$(n+1)(-2x)(1-x^2)^n$

$$= \frac{n^2}{2(n+1)}$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

$$\lim \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim f_n(x)\,dx$$

Exemple. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}} \end{array}$$

1. Est-ce que $(f_n(x))_n$ admet une limite ?

2. Dérivées ?

Remarque. *La convergence « point à point » des suites de fonctions ne permet pas le passage à la limite dans la continuité, le calcul d'intégrales, la dérivation.*

2 Convergence simple

2.1 Définition

Définition. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction. On dit que $(f_n)_n$ **converge simplement sur** I vers f si et seulement si, pour tout $x \in I$ **fixé**, la suite numérique $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$. La fonction f s'appelle alors la **limite simple** de la suite de fonctions $(f_n)_n$.

À $x \in I$ fixé.

On étudie $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$.

$\longrightarrow$ étude de suite numérique.

à x fixé $\quad f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$

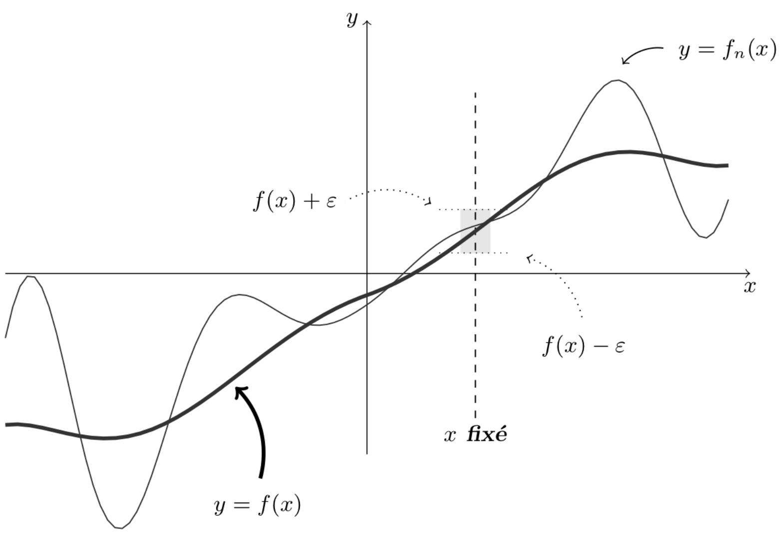
Remarque.

- *$(f_n)_n$ **converge simplement sur** I si et seulement s'il existe f telle que $(f_n)_n$ converge simplement vers f.*
- *Étudier la convergence simple de $(f_n)_n$, c'est étudier la convergence de la suite $(f_n(x))_n$ à x fixé.*
- *On trouve parfois la notation $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{CS}} f$.*
- *On peut quantifier la proposition « $(f_n)_n$ converge simplement vers f » :*

$$\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geqslant N,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

Dans cette quantification, l'indice N à partir duquel $f_n(x)$ approche $f(x)$ à ε près dépend de x.

Interprétation graphique.



Exemple. Étudier la convergence simple des suites de fonctions définies par :

1. $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ où $f_n(x) = x^n$

Étude de la cv simple :

Soit $x \in [0,1]$ fixé.

1er cas : si $x \in [0,1[$

alors $x^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ (suite géométrique)

2e cas si $x = 1$

alors $x^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

Donc $(f_n)_n$ converge simplement vers

$$f : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

2. $g_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ où $g_n(x) = \dfrac{1}{n+x^2}$

Étude de la cv simple :

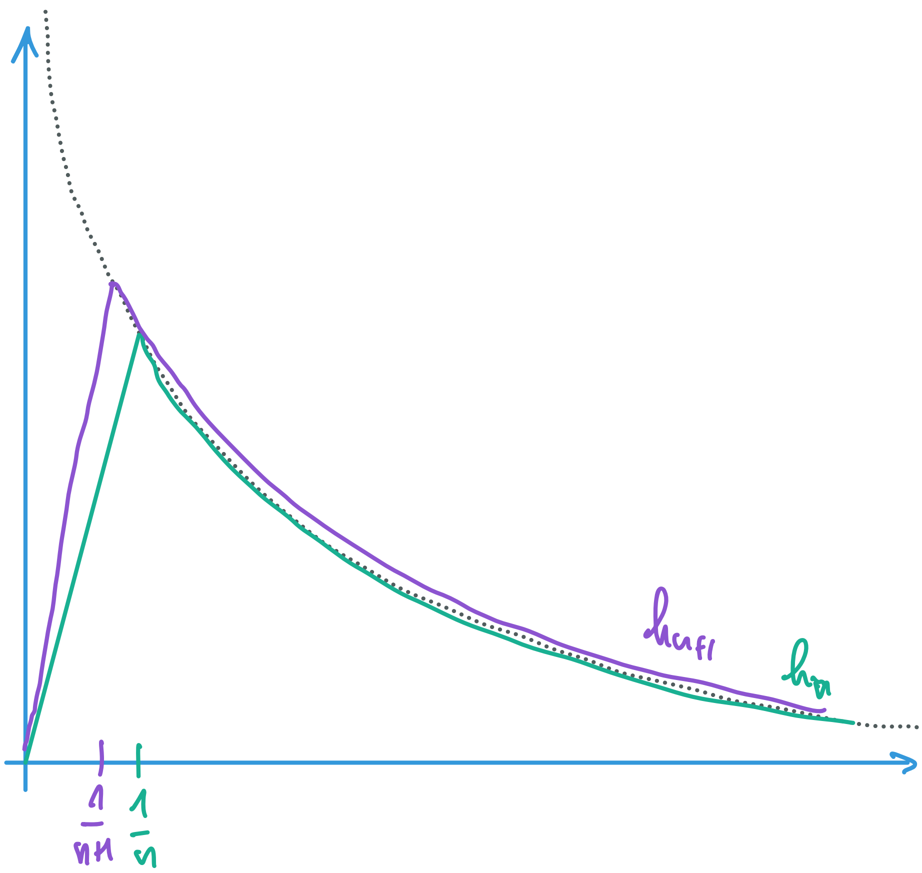
Soit $x \geqslant 0$ fixé.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n(x) = \dfrac{1}{n+x^2}$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Donc $(g_n)_n$ cv simplement vers $(x \longmapsto 0)$

3. $h_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ où $h_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } x \leqslant \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > \frac{1}{n} \end{cases}$



Étude de la cv simple

Soit $x \in \mathbb{R}_+$ fixé. $h_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} ?$

~~1er cas : si $x \leqslant \frac{1}{n}$~~

~~2e cas : si $x > \frac{1}{n}$~~

$= \begin{cases} n^2 x & \text{si } x \leqslant \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > \frac{1}{n} \end{cases}$

1er cas : si $x = 0$ $\quad h_n(0) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

2e cas : si $x > 0$

$$h_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } n \leqslant \frac{1}{x} \\ \frac{1}{x} & \text{si } n > \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{x} \quad \text{si } n \geqslant \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + 1$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{x}$$

<u>CCl</u> : $(h_n)_n$ converge simplement vers

$$h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 1/x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2.2 Propriétés

Proposition. Si $B \subset I$ et si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I,
alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f_{|B}$ sur B.

Proposition. Si les suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simplement vers f et g sur I et si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,
alors la suite de fonctions $(\lambda f_n + \mu g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\lambda f + \mu g$ sur I.