pour jé : 22.2, 22.3, 22.15

élection des délégués : lundi du 30 sept

1.2 Opérations par blocs

1.2.1 Les blocs-colonnes, les blocs-lignes

Exemple. Calculer le produit :

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{K})$$

$$X \quad Y \quad Z$$

Proposition. Si C est une colonne, le produit AC est une colonne, combinaison linéaire des colonnes de A.

$$\mathcal{M}_{3\cancel{3}} \times \mathcal{M}_{\cancel{3}1} \qquad \mathcal{M}_{31}$$

$$\left(X \mid Y \mid Z\right)\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3X - 2Y + Z$$

$$\underbrace{\left(X \mid Y \mid Z\right)}_{A}\left(B_1 \mid B_2 \mid B_3\right) = \left(AB_1 \mid AB_2 \mid AB_3\right)$$

CL des colonnes de A

Proposition. Si A et B sont des matrices telles que le produit AB est compatibles, on a :

$$AB = \left(AB_1 \mid \cdots \mid AB_q\right)$$

où $B_1, \ldots, B_q$ sont les colonnes de B.

Proposition. Si A et B sont des matrices telles que le produit AB est compatibles, on a :

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 B \\ \hline \vdots \\ \hline A_n B \end{pmatrix}$$

où $A_1, \ldots, A_n$ sont les lignes de A.

1.2.2 Matrices par blocs

Considérer une matrice par blocs, c'est regrouper des coefficients adjacents dans la matrice en blocs de sous-matrices.

Exemple. La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ peut être vue par blocs en regroupant :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \quad \text{soit} \quad \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$$

en notant $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$.

Vect(e_3) stable par u.

$$\mathrm{Mat}(u, (e_1, e_2, e_3)) = \begin{array}{ccc} u(e_1) & u(e_2) & u(e_3) \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

Bloc de 0
$\iff$ Vect(e_1, e_2) stable par u
$\iff$ Vect$(u(e_1), u(e_2)) \subset$ Vect(e_1, e_2)

Définition. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$, on considère des matrices :

$$A_{ij} \in \mathcal{M}_{n_i p_j}(\mathbb{K})$$

et on note $N = n_1 + \cdots + n_n$, $P = p_1 + \cdots + p_p$. On définit alors la **matrice par blocs** :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{np} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{NP}(\mathbb{K})$$

Définition. En conservant les notations précédentes, on dit que A est :

- **diagonale par blocs** lorsque pour tout i, $n_i = p_i$ et, pour tout i, j :
$$i \neq j \implies A_{ij} = 0$$
- **triangulaire supérieure par blocs** lorsque pour tout i, $n_i = p_i$ et, pour tout i, j :
$$i > j \implies A_{ij} = 0$$

Remarque. *Une matrice diagonale par blocs (resp. triangulaire par blocs) n'est pas, en général, diagonale (resp. triangulaire).*

Exemple. La matrice précédente est diagonale par blocs.

Combinaisons linéaires de matrices par blocs. Soit A et B deux matrices par blocs de dimensions compatibles pour les combinaisons linéaires :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{np} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{n1} & \cdots & B_{np} \end{pmatrix}$$

où pour chaque (i, j) A_{ij} et B_{ij} sont de même dimension, dans $\mathcal{M}_{n_i p_i}(\mathbb{K})$.
Alors, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a :

$$\lambda A + \mu B = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} + \mu B_{11} & \cdots & \lambda A_{1p} + \mu B_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{n1} + \mu B_{n1} & \cdots & \lambda A_{np} + \mu B_{np} \end{pmatrix}$$

Remarque. *Ainsi, lorsque les blocs sont compatibles, les combinaisons linéaires se font bloc par bloc.*

Multiplications de matrices par blocs. Soit A et B deux matrices par blocs de dimensions compatibles pour la multiplication :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{np} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{p1} & \cdots & B_{pq} \end{pmatrix}$$

où pour chaque (i, j, k), $A_{ik} \in \mathcal{M}_{n_i p_k}(\mathbb{K})$ et $B_{kj} \in \mathcal{M}_{p_k q_j}$. Alors le produit AB s'écrit par blocs :

$$AB = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nq} \end{pmatrix}$$

où $C_{ij} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik} B_{kj}$, pour tout i, j.

Remarque. *Il importe, avant d'envisager un produit par blocs, de bien vérifier la compatibilité pour le produit des dimensions des différents blocs.*

même découpage par blocs

Corollaire. Le produit de deux matrices diagonales par blocs (resp. triangulaires supérieures par blocs) est une matrice diagonale par blocs (resp. triangulaire supérieure par blocs).

Soit

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{n1} & \cdots & B_{nq} \end{pmatrix}$$

diag. par blocs

où $A_{ij} = (0)$ $\forall i \neq j$

$B_{ij} = (0)$ $\forall i \neq j$

$$AB = \left(\begin{array}{c:c:c} C_{11} & C_{12} & \cdots \\ \hdashline C_{21} & & \\ \hdashline \vdots & & \end{array}\right)$$

$$\text{où } C_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \underbrace{A_{ik}}_{\text{nul dès que } i \neq k} \overbrace{B_{kj}}^{\text{nul dès que } k \neq j}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ & \text{(dans la somme, tous les termes sont nuls)} \\ A_{ii} B_{ii} & \text{si } i = j \end{cases}$$

donc $AB = C$ est diag par blocs.

2 Matrice comme représentation d'un vecteur, d'une famille de vecteurs

Définition. Soit E un espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour tout $x \in E$, on note $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ ses coordonnées dans $\mathcal{B}$. On appelle **matrice de x relativement à la base $\mathcal{B}$** la matrice :

$$X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$$

Remarque. *$\mathcal{B}$ étant fixée, l'application $x \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ est un isomorphisme entre E et $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$.*

Remarque. *L'application $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est un isomorphisme entre $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$.*

E ev de dim n

$\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$

$\mathcal{B} = (e_1 \ldots e_n)$ base de E

$$\vec{x} \xleftrightarrow[\text{d'ev}]{\text{isomorphisme}} X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

coord de x dans $\mathcal{B}$

$$X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \iff x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

Définition. Avec les même notations, où $\mathcal{B}$ est fixée, on considère $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ une famille de p vecteurs. Pour $j \in \{1, \dots, p\}$, on note $(x_{1j}, \dots, x_{nj}) \in \mathbb{K}^n$ les coordonnées de x_j dans $\mathcal{B}$. On appelle **matrice de** $(x_1, \dots, x_p)$ **relativement à la base** $\mathcal{B}$ la matrice :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} x_1 & \cdots & x_p \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{np} \end{pmatrix} & \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} \end{array} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$$

Proposition. Avec les même notations, où $\mathcal{B}$ est fixée, on considère $(f_1, \dots, f_n) \in E^p$ une famille de n vecteurs. Pour $j \in \{1, \dots, n\}$, on note $(a_{1j}, \dots, a_{nj}) \in \mathbb{K}^n$ les coordonnées de x_j dans $\mathcal{B}$. La matrice de $(f_1, \dots, f_n)$ relativement à la base $\mathcal{B}$ est la matrice :

$$P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_1, \dots, f_n) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} f_1 & \cdots & f_n \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} & \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} \end{array} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

$\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ est une base de E si et seulement si P est inversible.
Dans ce cas, P est la **matrice de passage** de l'« ancienne » base $\mathcal{B}$ à la « nouvelle » base $\mathcal{B}'$.

Remarque. *Dans une matrice de passage, on exprime en colonne les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base en fonction des vecteurs de l'ancienne base.*

$$P = \mathrm{Pass}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}') = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$$

ancienne base

nouvelle base

3 Matrice comme représentation d'application linéaire

3.1 Matrice d'application linéaire

Définition. Soit E, F deux espaces de dimensions finies p et n respectivement, munies des bases $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n)$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **matrice de u relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$** :

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$$

où, pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$, $(a_{1j}, \ldots, a_{nj})$ est le n-uplet des coordonnées de $u(e_j)$ relativement à la base $\mathcal{C}$.

Remarque. *Dans une matrice d'application linéaire, on exprime en colonne les coordonnées des vecteurs $u(e_j)$ en fonction des vecteurs f_i.*

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u(e_1) & \ldots & u(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{array}$$

Théorème.

Avec les mêmes notations, où $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont des bases fixées de E et F respectivement :

$$\begin{array}{rccl} \phi : & \mathcal{L}(E, F) & \to & \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) \\ & u & \mapsto & \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels

Théorème.

Avec les mêmes notations, où $\mathcal{B}$ est une base fixée de E :

$$\begin{array}{rccl} \phi : & \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & u & \mapsto & \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) \end{array}$$

est un isomorphisme d'algèbres, qui induit un isomorphisme de groupes entre $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ et $(\mathrm{GL}n(\mathbb{K}), \times)$.

iso bijectif

morphisme d'ev $\mathrm{Mat}(\lambda u + \mu v, \mathcal{B}) = \lambda \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) + \mu \mathrm{Mat}(v, \mathcal{B})$

morphisme d'anneau $\mathrm{Mat}(u \circ v, \mathcal{B}) = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) \times \mathrm{Mat}(v, \mathcal{B})$

$\mathrm{Mat}(\mathrm{Id}_E, \mathcal{B}) = I_n$

Si u inversible, $\quad \mathrm{Mat}(u^{-1}, \mathcal{B}) = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})^{-1}$

Proposition. Avec les mêmes notations, et en notant $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$, $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(y)$, et $M = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}, \mathcal{C})$, on a :

$$y = u(x) \iff Y = MX$$

$$E \text{ ev} \xleftrightarrow{\quad \mathcal{B} \text{ base} \quad} \text{matriciel}$$

$$x \longleftrightarrow X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$$

$$u \in \mathcal{L}(E) \longleftrightarrow M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

$$y = u(x) \longleftrightarrow Y \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$$

$$\underline{\underline{Y = MX}}$$

Rmq : Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$

on fixe $\mathcal{B}$ base de E, $\mathcal{C}$ base de F

pour définir $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}, \mathcal{C})$

Si $u \in \mathcal{L}(E)$ endomorphisme

on fixe une seule base $\mathcal{B}$ de E

pour définir $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$

3.2 Théorème du rang matriciel

Définition. Le rang d'une matrice A, c'est la dimension de $\operatorname{Im} A$, c'est-à-dire le rang de la famille de ses colonnes.

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. Alors :

$$\operatorname{rg}(A) + \dim \operatorname{Ker} A = p \qquad \text{(le nombre de colonnes de } A\text{)}$$

Théorème.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$\operatorname{rg}(A) + \dim \operatorname{Ker} A = n$$

Une matrice carrée A $n \times n$ agit sur les colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{colonne}}}{A X} = Y$$

$$a \; \cancel{A} : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$
$$X \longmapsto AX$$

dim n = nb de colonnes de A.

Exemple : Soit $u : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$
$$A \longmapsto \operatorname{tr}(A)$$

on applique le th du rang à u

$$\dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Ker} u = \dim \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) = 9$$

3.3 Retour sur la matrice de passage

Proposition. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$. Alors :

$$P = \mathrm{Mat}(\mathrm{Id}_E, \mathcal{B}', \mathcal{B})$$

Corollaire. L'inverse de P est la matrice de passage « dans l'autre sens » :

$$\mathrm{Pass}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')^{-1} = \mathrm{Pass}(\mathcal{B}' \to \mathcal{B})$$

4 Formules de changement de base

Remarque. *Toutes les formules de changement de base doivent être connues sous la forme « expression dans l'ancienne base » en fonction de l'« expression dans la nouvelle base ».*

4.1 Changement de base pour un vecteur

Théorème.

Soit E un espace vectoriel muni des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. On note $P = \mathrm{Pass}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$ $= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$
Soit $x \in E$ un vecteur. On note $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$. Alors :

$$X = PX'$$

ANCIEN NOUVEAU

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \arrow[r, leftrightarrow, "\mathcal{B}"] & E \text{ ev} \arrow[r, leftrightarrow, "\mathcal{B}'"] & \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \\ X \arrow[r, leftrightarrow] & \vec{x} \arrow[r, leftrightarrow] & X' \end{tikzcd}$$

$P = \mathrm{Pass}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$

ancien nouvelle

$$X = P X'$$

4.2 Changement de base pour un endomorphisme

Théorème.

Soit E un espace vectoriel muni des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. On note $P = \mathrm{Pass}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$ $= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. On note $A = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$ $A' = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}')$. Alors :

$$A = PA'P^{-1}$$

ancien matriciel $\xleftrightarrow{\mathcal{B}}$ E ev $\xleftrightarrow{\mathcal{B}'}$ nouveau matriciel

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ni A \longleftrightarrow u \in \mathcal{L}(E) \longleftrightarrow A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

$$A = P A' P^{-1}$$

$$X = P X'$$

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "u"] & & E \\
\mathcal{B} \arrow[d, leftrightarrow] & & \mathcal{B} \arrow[d, leftrightarrow] \\
\mathcal{B}' \arrow[rr, "u"] & & \mathcal{B}'
\end{tikzcd}$$

$$\xleftrightarrow{\ \mathcal{B}\ } \quad E \text{ ev} \quad \xleftrightarrow{\ \mathcal{B}'\ }$$

$$\begin{array}{ccc}
X & x & X' \\[1em]
A & u \in \mathcal{L}(E) & A' \\[1em]
Y = AX & y = u(x) & Y' = A'X'
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
Y = AX = APX' \\
\parallel \\
PY' = PA'X'
\end{array}$$

4.3 Changement de base pour une application linéaire

Proposition. Soit E un espace vectoriel muni des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. On note $P = \mathrm{Pass}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$.
Soit F un espace vectoriel muni des bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. On note $Q = \mathrm{Pass}(\mathcal{C} \to \mathcal{C}')$.
Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire. On note $A = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ $A' = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}', \mathcal{C}')$. Alors :

$$A = QA'P^{-1}$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "u"] & & F \\ \mathcal{B} \arrow[d, "P"'] & & \mathcal{C} \arrow[d, "Q"] \\ \mathcal{B}' & & \mathcal{C}' \end{tikzcd}$$

$A = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}, \mathcal{C})$

$A' = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}', \mathcal{C}')$

$A = Q A' P^{-1}$

5 Matrices sembables

Définition. Deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont **semblables** si et seulement s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$A = PBP^{-1}$$

Théorème.

Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes, c'est-à-dire :

$$\exists E \text{ espace vectoriel },\exists u \in \mathcal{L}(E),\ \exists \mathcal{B}, \mathcal{B}' \text{ bases de } E \text{ t.q. } A = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) \text{ et } B = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}')$$

Remarque : c'est une rel. d'équivalence

- réflexive
- symétrique
- transitive

Preuve : par la fle de changement de base.

6 Trace d'une matrice

Définition. La **trace d'une matrice carrée** est la somme de ses coefficients diagonaux :

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Proposition.

- tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Pour A, B telles que AB et BA sont carrées :

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$$

Corollaire. Deux matrices semblables ont la même trace.

Preuve : Soit A, B semblables.

Donc $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ tq $A = PBP^{-1}$

donc $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(PBP^{-1})$

$= \operatorname{tr}(BP^{-1}P)$

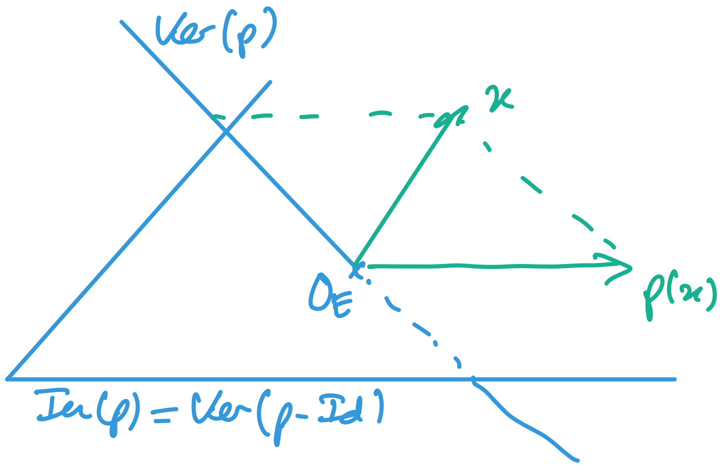
$= \operatorname{tr}(B)$

Définition. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **trace de** u la trace de toute matrice représentant u.

Proposition. tr est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$ vérifiant, pour tout $u, v \in \mathcal{L}(E)$:

$$\operatorname{tr}(u \circ v) = \operatorname{tr}(v \circ u)$$

Proposition. La trace d'un projecteur est égale à son rang.



On a $\operatorname{Im} p \oplus \ker p = E$

On considère une base adaptée à cette somme directe

$$\mathcal{B} = (\underbrace{e_1 \dots e_r}_{\text{base de } \operatorname{Im} p}, \underbrace{e_{r+1}, \dots, e_n}_{\text{base de } \ker p})$$

$$\operatorname{Mat}(p, \mathcal{B}) = \begin{array}{cc} \overset{r}{\longleftrightarrow} & \overset{n-r}{\longleftrightarrow} \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \updownarrow r \\ \updownarrow n-r \end{array} \quad \text{par blocs}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} p(e_1) & \dots & p(e_r) & p(e_{r+1}) & \dots & p(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} e_1 \\ \vdots \\ e_r \\ e_{r+1} \\ \vdots \\ e_n \end{array}$$

On a $\operatorname{tr}(p) = r = \operatorname{rg}(p)$

7 Sous-espaces stables

7.1 Sous-espaces stables par un endomorphisme

Définition. Soit F un sous-espace vectoriel de E, et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que F **est stable par** u si et seulement si $\forall x \in F$, $u(x) \in F$.

Remarque. *On peut écrire $u(F) \subset F$, en utilisant la notion d'image directe d'un ensemble par une application. L'intérêt de cette notion vient surtout du fait que l'on peut alors donner la définition suivante :*

Définition. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. On peut définir :

$$u_F : \begin{array}{ccc} F & \to & F \\ x & \mapsto & u(x) \end{array}$$

qui en un endomorphisme de F, appelé **endomorphisme induit**.

Remarque. *Ce n'est pas exactement la restriction de u à F, puisque le but aussi est réduit à F.*

$$u : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array} \qquad u_{|F} : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}$$

Si F stable par u : $u_F : \cancel{u_{|F}} : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}$

Proposition. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E stables par u, alors $F+G$ et $F \cap G$ sont aussi stables par u.

Théorème.

> Soit u et v deux endomorphismes de E qui commutent. Alors $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont stables par v.

Corollaire. Soit u et v deux endomorphismes de E qui commutent. Alors pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $\operatorname{Ker}(u-\lambda \mathrm{Id})$ et $\operatorname{Im}(u-\lambda \mathrm{Id})$ sont stables par v.

Mque Ker u est stable par v :

Soit $x \in \operatorname{Ker}(u)$ — Mque $v(x) \in \operatorname{Ker}(u)$

On calcule $u(v(x)) = v \circ u(x)$ car $u \circ v = v \circ u$

$= v(0)$ car $x \in \operatorname{Ker} u$

$= 0$

donc $v(x) \in \operatorname{Ker}(u)$

Mque Im u est stable par v :

Soit $y \in \mathrm{Im}\, u$, ie $\exists x \in E$ tq $y = u(x)$.

Mque $v(y) \in \mathrm{Im}(u)$

$$\begin{aligned} v(y) &= v(u(x)) \\ &= u \circ v\,(x) \quad \text{car } u \circ v = v \circ u \\ &= u[v(x)] \\ &\in \mathrm{Im}\, u \end{aligned}$$

Rmq : $x \in \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$

$\iff u(x) = \lambda x$

projector: $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id})$

$x \in \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}) \iff p(x) = x$

si $u \circ v = v \circ u$, $(u - \lambda \mathrm{Id}) \circ v = v \circ (u - \lambda \mathrm{Id}_E)$

7.2 Stabilité et matrices par blocs

$F = \mathrm{Vect}(e_1 \dots e_p)$

Proposition. Soit E un espace vectoriel de dimension n, F un sous-espace vectoriel de dimension p. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de E adaptée à F. Soit enfin $u \in \mathcal{L}(E)$. On a la caractérisation suivante :

F est stable par u si et seulement si la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure par blocs :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est la matrice de l'endormophisme induit u_F.

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{array}{c} u(e_1) \dots u(e_p)\ u(e_{p+1}) \dots u(e_n) \\ \left(\begin{array}{c|c} A & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} e_1 \\ \vdots \\ e_p \\ e_{p+1} \\ \vdots \\ e_n \end{array}$$

$\left.\begin{array}{l} e_1 \\ \vdots \\ e_p \end{array}\right\}$ engendre F

F stable par u, on peut définir l'endomorphisme induit

$$u_F : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}$$

$$\mathrm{Mat}(u_F, (e_1 \dots e_p)) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u(e_1) & & u(e_p) \\ \| & & \| \\ u_F(e_1) & \dots & u_F(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} e_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ e_p \end{array}$$

Proposition. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $F_1, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Les F_i sont tous stables par u si et seulement si la matrice de u dans une base $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p)$ adaptée à la somme directe est diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix}$$

où $A_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{K})$ est la matrice de l'endomorphisme induit u_{F_i}.

Corollaire. Soit E un espace de dimension finie n, de base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme laissant stable les n droites vectorielles $F_i = \mathrm{Vect}(e_i)$. Alors, la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où chaque $\lambda_i \in \mathbb{K}$.

8 Annexes