Pour me : 21.16, 21.25, 21.31, 21.32

Pour lu, 7h30 rédiger au choix : 21.29, 21.30
11.16, 11.17

2 Applications linéaires, endomorphismes

2.1 Structure sur des ensembles d'applications linéaires

Proposition. Soit E, F, G des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Alors $\begin{array}{rcl} \mathcal{L}(F,G)\times\mathcal{L}(E,F) & \to & \mathcal{L}(E,G) \\ (u,v) & \mapsto & u\circ v \end{array}$ est bilinéaire.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "v"] \arrow[rr, bend left, "u \circ v"] & F \arrow[r, "u"] & G \end{tikzcd}$$

Preuve : • $u\circ v$ est bien linéaire

• linéarité par rapport à la 1ère variable.

$\forall x \in E$
$$\big((\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)\circ v\big)(x)$$
$$= (\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)(v(x))$$
$$= \lambda_1 u_1(v(x)) + \lambda_2 u_2(v(x))$$
$$= (\lambda_1 u_1\circ v + \lambda_2 u_2 \circ v)(x)$$

Toujours vrai

• linéarité par rapport à la 2nde variable

$\forall x \in E$
$$u\circ(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)(x)$$
$$= u\left[(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)(x)\right]$$
$$= u\left(\lambda_1 v_1(x) + \lambda_2 v_2(x)\right)$$
$$= \lambda_1 u(v_1(x)) + \lambda_2 u(v_2(x)) \quad \text{car } u \text{ linéaire}$$
$$= (\lambda_1 u\circ v_1 + \lambda_2 u\circ v_2)(x)$$

En passant.

$$u \circ v = 0 \iff \operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker} u$$

$$\xrightarrow{\ v\ } \quad \xrightarrow{\ u\ }$$

$u \circ v = 0$ signifie que toutes les images par v tombent dans le noyau de u

Proposition. Soit E, F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Alors $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$ est un espace vectoriel.
Lorsque E et F sont deux espaces de dimensions finies respectives n et p, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie $n \times p$.

Remarque. *En particulier, l'espace $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ des formes linéaires sur E est un espace vectoriel. On le note parfois E^* et il s'appelle l'**espace dual** de E. Son étude est hors programme.*
Lorsque E est de dimension finie, $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est de même dimension finie.

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E fixées.

$\mathcal{C} = (f_1 \dots f_p)$ base de F.

$$\Phi : \mathcal{L}(E, F) \longrightarrow \mathcal{M}_{\cancel{np}}(\mathbb{K}) \quad \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$$

isomorphisme

$$u \longmapsto \operatorname{Mat}(u, \mathcal{B}, \mathcal{C})$$

$$= \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} u(e_1) & u(e_2) & \cdots & u(e_n) \end{array} & \\ \left(\begin{array}{cccc} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{array}\right) & \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_p \end{array} \end{array}$$

Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

ie. $\Phi(\lambda u + \mu v) = \operatorname{Mat}(\lambda u + \mu v, \mathcal{B}, \mathcal{C})$

$$= \lambda \, \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}, \mathcal{C}) + \mu \, \mathrm{Mat}(v, \mathcal{B}, \mathcal{C})$$

$$= \lambda \, \phi(u) + \mu \, \phi(v)$$

- Si $\phi(u) = 0$, $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = 0$

  donc $u = 0_{\mathcal{L}(E,F)}$

donc ϕ injective

- Si $A \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$, il existe une unique $u \in \mathcal{L}(E,F)$ tq $A = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ (thm de détermination des appl. linéaires).

$(E_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$ est base de $\mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$ donc $\dim \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K}) = p \times n$

Comme ϕ isomorphisme, $\dim \mathcal{L}(E,F) = p \times n$.

R2. Base de $\mathcal{L}(E,F)$

On pose $v_{ij} : E \longrightarrow F$

$$e_j \longmapsto f_i$$

$$e_k \longmapsto 0 \quad \text{si } k \neq j$$

$(v_{ij})_{i,j}$ libre, génératrice
linéaire

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Soit $E = \mathbb{R}_1[X]$

$$\mathcal{B} = \big((X-3),\ (X+7)\big)$$

$$\exists!\ u \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } \operatorname{Mat}(u, \mathcal{B}) = A$$

$$A \quad \begin{array}{cc} \scriptstyle u(X-3) & \scriptstyle u(X+7) \\ \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} X-3 \\ X+7 \end{array}$$

$E = \mathbb{K}^2$ $\quad$ $\mathcal{B}$ canonique $\quad e_1 = (1,0)$

$e_2 = (0,1)$

$$\exists!\ u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^2) \text{ tq } \operatorname{Mat}(u, \text{can}) = A$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} u(e_1) & u(e_2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} e_1 \\ e_2 \end{array}$$

On dit que u est canoniquement associé à A

<u>Mieux :</u> $E = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ x, y \in \mathbb{K} \right\}$

$\mathcal{B}$ base canonique $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$u : \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K})$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ x + 3y \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = A$$

u est l'endom de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K})$ canoniquement associée à A.

Proposition. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Alors $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$ est une algèbre, non commutative et non intègre.

Proposition. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Alors $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ est un groupe, non commutatif.

$$u : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}$$

$\mathcal{L}(E) = \{$endom. de $E\}$

$= \{u : E \to E,$ linéaires$\}$.

1. $(\mathcal{L}(E), +, \cdot)$ ev.

$\mathcal{L}(E)$ est muni de la loi $\circ$

$$E \xrightarrow{v} E \xrightarrow{u} E$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{u \circ v}$$

2. $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est anneau (neutre Id_E)

3. $\circ$ et $\cdot$ se comportent bien l'une par rapport à l'autre

$$\lambda . (u \circ v) = (\lambda . u) \circ v$$

$$= u \circ (\lambda . v)$$

$\mathcal{L}(E)$ algèbre

$\circ$ non commutatif.

l'anneau $\mathcal{L}(E)$ non intègre

$$u \circ v = 0 \not\Rightarrow u = 0 \text{ ou } v = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker} u$$

$(GL(E), \circ)$ groupe

$\uparrow$

ens des automorphismes de E, endomorphismes bijectifs.

Preuve : [...] sous-groupe de $(\mathfrak{S}_E, \circ)$

2.2 Définition par l'image des vecteurs d'une base

Théorème.

Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base d'un espace vectoriel E, $(f_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel F, indexée par le même ensemble I, alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que, pour tout $i \in I$, $u(e_i) = f_i$.

Remarque. *Ce théorème est à la base de la notion de matrice représentant une application linéaire.*

$E \longrightarrow F$

$(e_i)_i$ base de E

définir $u \in \mathcal{L}(E,F)$

$\longleftrightarrow$ définir $u(x)$ pour tout $x \in E$

$\longleftrightarrow$ définir $u(e_i)$ pour tout $i \in I$

Si $u(e_i) = f_i \ \forall i \in I$.

Pour $x \in E$, $\exists!\ x_i$ (coord de x) tq $x = \sum_{i\in I} x_i e_i$

Analyse

donc nécessairement

$$f(x) = f\Big(\sum_{i\in I} x_i e_i\Big)$$

$$= \sum_{i\in I} x_i f(e_i) \quad \text{par linéarité}$$

$$= \sum_{i\in I} x_i f_i$$

Synthèse Réciproquement

Poser $f : E \longrightarrow F$

$$x \longmapsto \sum_{i \in I} x_i f_i$$

où $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$ coord

- $f(e_j) = \sum_{i \in I} x_i f_i$ où $x_i = 0$ si $\neq j$, $x_j = 1$

$= f_j$

- linéarité de f [...]

Rmq. déf des matrices. Si E, F de dim finies, chaque $u(e_j) = f_j$ est un vecteur de F, repéré par ses coord dans la base de F.
u est défini par $n \times p$ nombres.

$u(e_i)$ (e_i) base de E

Corollaire. Avec les notations précédentes :

- u est surjective si et seulement si $(f_i)_{i\in I}$ engendre F.
- u est injective si et seulement si $(f_i)_{i\in I}$ est libre.

immédiate (à écrire)

Proposition. Une application linéaire $E \to F$ est un isomorphisme si et seulement si elle transorme une (resp. toute) base de E en une base de F.

Corollaire. Deux espaces de dimensions finies sont isomorphes si et seulement si ils ont la même dimension.

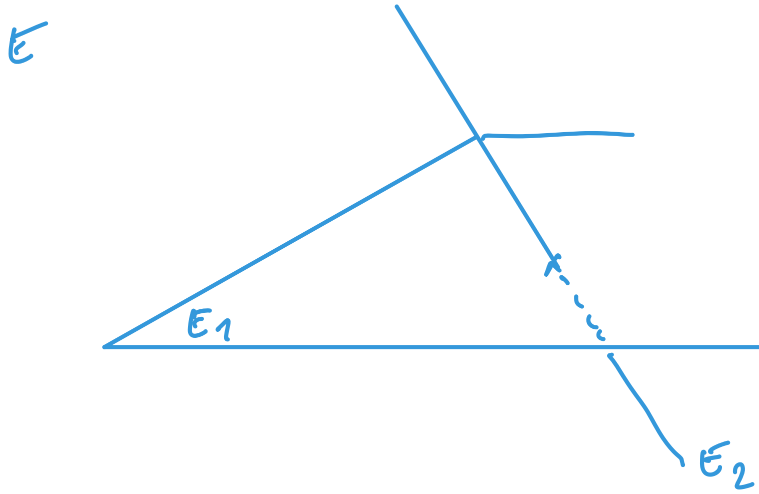
2.3 Définition par les restrictions à des sous-espaces en somme directe

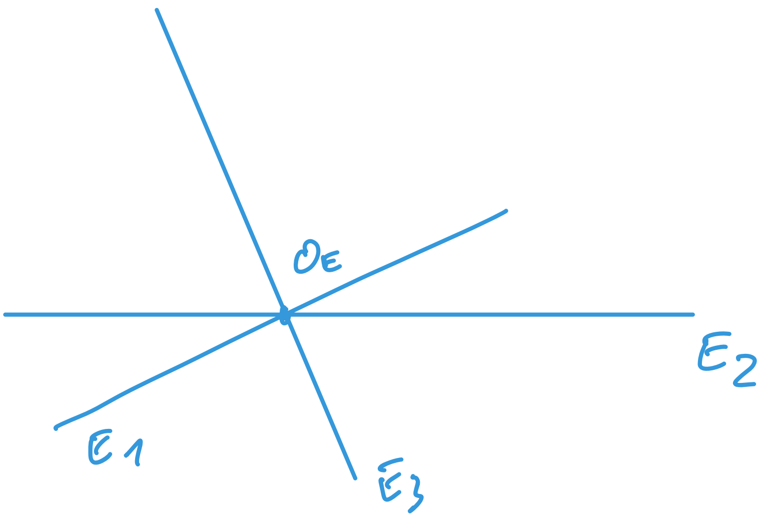
Théorème.

Soit $E_1, \ldots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$. Pour tout i, on considère $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$.
Alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $u_{|E_i} = u_i$ pour tout i.

Corollaire. Deux applications linéaires qui coïncident sur tous les F_i sont égales. On peut définir une application linéaire en se contentant de la définir sur chaque F_i.

Remarque. *La donnée, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, de $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$ permet donc de définir sans ambiguité une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ définie sur E tout entier.*





définir $u \in \mathcal{L}(E,F)$

$\longleftrightarrow$ définir $u(x)$ pour tout $x \in E$

$\longleftrightarrow$ définir la restriction de u à chaque E_i $u_i = u_{|E_i} \in \mathcal{L}(E,F)$

$\Longleftrightarrow$ définir $u(x)$ pour tout $x \in E_i$ $\forall i$

Rmq : si u est défini, les u_i aussi

Ici, si on connaît les u_i, on peut reconstruire.

Preuve : On suppose connus les $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$

Mq $\exists !\, u \in \mathcal{L}(E, F)$ tq $\forall i$, $u|_{E_i} = u_i$

Analyse On suppose que u existe

Soit $x \in E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} E_i$

donc $x = x_1 + \cdots + x_p \in E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$

donc $u(x) = u(x_1) + \cdots + u(x_p)$ par linéarité

$= u_1(x_1) + \cdots + u_p(x_p)$

car $x_1 \in E_1$, $u|_{E_1} = u_1$

$\vdots$

$x_p \in E_p$, $u|_{E_p} = u_p$

donc u est définie de façon unique.

Synthèse : Définissons

$$u : E \longrightarrow F$$
$$x \longmapsto u_1(x_1) + \cdots + u_p(x_p)$$

où $x = x_1 + \cdots + x_p \in E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$

- u est à valeurs dans F
- u est linéaire

Soit $x, y \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$$x = x_1 + \cdots + x_p \in E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$$

$$y = y_1 + \cdots + y_p \in E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$$

$u(\lambda x + \mu y) = ?$

déc de $\lambda x + \mu y$ dans $E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$?

$$\lambda x + \mu y = \lambda (x_1 + \cdots + x_p) + \mu (y_1 + \cdots + y_p)$$
$$= \underbrace{(\lambda x_1 + \mu y_1)}_{\in E_1} + \cdots + \underbrace{(\lambda x_p + \mu y_p)}_{\in E_p}$$

par unicité de la déc., c'est l'écriture de $\lambda x + \mu y$ dans $E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$.

donc $u(\lambda x + \mu y)$

$$= u_1(\lambda x_1 + \mu y_1) + \cdots + u_p(\lambda x_p + \mu y_p)$$

$$= \lambda u_1(x_1) + \mu u_1(y_1) + \cdots + \lambda u_p(x_p) + \mu u_p(y_p)$$

$$= \lambda \left(u_1(x_1) + \dots + u_p(x_p) \right) + \mu \left(u_1(y_1) + \dots + u_p(y_p) \right)$$

$$= \lambda u(x) + \mu u(y).$$

- $u|_{E_i}$ coïncide avec u_i ?

Soit $x_i \in E_i$

on a $x_i = \underbrace{0}_{\in E_1} + \dots + \underbrace{x_i}_{\in E_i} + \dots + \underbrace{0}_{\in E_p}$

$\in E_1 \oplus \dots \oplus E_p$

donc $u(x_i) = u_i(x_i)$

donc $u|_{E_i} = u_i$

Remarque:

On a défini, lorsque $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$, les projections associées :

$$E = E_1 \oplus \underbrace{(E_2 \oplus \dots \oplus E_p)}_{F_1}$$

On a défini $p_1 =$ proj sur E_1 de direction F_1

De même $p_2, \dots, p_p$

On a remarqué : $Id_E = p_1 + \dots + p_p$

$p_i \circ p_j = 0 \quad \forall i \neq j$

On a aussi :

$u_i = u|_{E_i}$ correspond à $u \circ p_i$

$u_i : E_i \longrightarrow F$

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{p_i} & E & \xrightarrow{u} & F \\ x & \longmapsto & x_i & \longmapsto & u(x_i) \end{array}$$

2.4 Rang

Définition. Soit f une application linéaire. Lorsque son image est dimension finie, on dit que f est de rang fini, et on définit le **rang de** f par :

$$\operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{Im} f)$$

Proposition. Le rang est inchangé lorsque l'on compose à gauche ou à droite par un isomorphisme.

Théorème du rang, forme géométrique.

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire, et S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E. Alors u induit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} u$, i.e. :

$$\widetilde{u} : \begin{array}{rcl} S & \to & \operatorname{Im}(u) \\ x & \mapsto & u(x) \end{array}$$

est un isomorphisme.

Théorème du rang.

En particulier, si E est de dimension finie, alors u est de rang fini et :

$$\dim E_{\text{source}} = \dim(\operatorname{Ker} u) + \dim(\operatorname{Im} u) \quad \text{soit encore} \quad \operatorname{rg}(u) = \dim E_{\text{source}} - \dim(\operatorname{Ker} u)$$

Corollaire. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire, avec E et F de même dimension finie. Alors u est bijective si et seulement si u est injective, si et seulement si u est surjective.

Le résultat s'applique en particulier pour les endomorphismes en dimension finie.

3 Annexes

3.1 Un mot sur les équations linéaires

On s'intéresse aux **équations linéaires**, de la forme :

$$u(x) = b$$

où $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $b \in F$ et d'inconnue $x \in E$.

équation

$$u(x) = b$$

Si x_0 est une solution particulière,

$$u(x_0) = b$$

égalité.

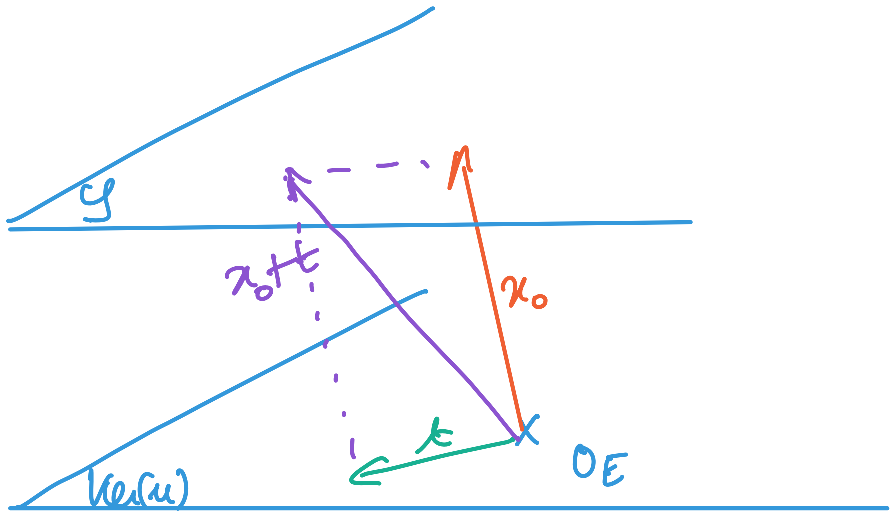
$$\begin{aligned} x \text{ solution} &\iff u(x) = b \\ &\iff u(x) = u(x_0) \\ &\iff u(x - x_0) = 0 \\ &\iff x - x_0 \in \operatorname{Ker} u \end{aligned}$$

donc $\mathcal{S} = \{x_0 + t \text{ où } t \in \operatorname{Ker} u\}$

$= x_0 + \operatorname{Ker}(u)$

translati de Ker(u), de vecteur x_0

espace affine



$\mathfrak{g}$
$x_0 + t$
x_0
t
O_E
$\mathrm{Ker}(u)$