Pour ge : 21.2, 21.3, 21.7

17. Qu'est-ce qu'une **application linéaire**, un **endomorphisme** ?
D'autres termes dans le même contexte ?

application $u : E \longrightarrow F$, $x \longmapsto u(x)$ — E, F ev sur $\mathbb{K}$, $(E, +, \cdot)$

tq : $\begin{cases} u(x+y) = u(x) + u(y) \\ u(\lambda x) = \lambda u(x) \end{cases}$

$\Rightarrow u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)$

endomorphisme = application linéaire $E \to E$

(à valeurs dans E)

Pour justifier : pour $x \in E$, on a bien $u(x) \in E$

isomorphisme = appl. linéaire bijective

automorphisme = appl linéaire bijective $E \to E$

forme linéaire = appl. linéaire $E \longrightarrow \mathbb{K}$

$\uparrow$ corps des scalaires

18. Qu'est-ce que le **noyau** de u, à quoi sert-il ?
19. Qu'est-ce que l'**image** de u, comment s'appelle sa dimension, à quoi sert-elle ?
20. Y a-t-il un lien entre noyau et image de u ?

$u \in \mathcal{L}(E,F)$ $\qquad u : E \longrightarrow F$

$x \in \mathrm{Ker}(u) \iff u(x) = 0$

$y \in \mathrm{Im}(u) \iff \exists x \in E$ tq $y = u(x)$

u injective $\iff \mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$

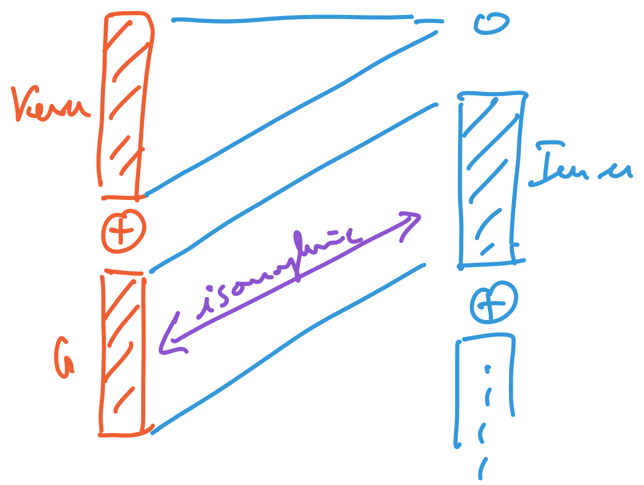
$\dim \mathrm{Im}\, u = \mathrm{rg}(u)$

Th du rang :

$$\dim E = \mathrm{rg}\, u + \dim \mathrm{Ker}\, u.$$

Preuve : Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$

$u : E \longrightarrow F$



Soit G supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, u$ dans E.

Alors u induit un isomorphisme de G sur $\mathrm{Im}\, u$.

Corollaire Si E est dim finie,

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ \dim E - \dim \operatorname{Ker} u}}{\dim G} = \dim \operatorname{Im} u$$

Preuve: Soit $\tilde{u} : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \operatorname{Im}(u) \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}$

(On avait $u : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}$)

- $\tilde{u}$ est bien définie, à valeur dans $\operatorname{Im}(u)$

  car $\forall x \in G,\ u(x) \in \operatorname{Im} u$

- $\tilde{u}$ est linéaire, bien sûr car u l'est.

- Mque $\tilde{u}$ est injective.

  Soit $x \in \operatorname{Ker} \tilde{u}$ ie $x \in G$ et $u(x) = 0$

  donc $x \in G \cap \operatorname{Ker}(u) = \{0_E\}$

  car $G \oplus \operatorname{Ker}(u)$

$\tilde{u} : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \operatorname{Im}(u) \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}$

  Ainsi $x = 0_E$ donc $\tilde{u}$ est injective

- Mque $\tilde{u}$ est surjective

  Soit $y \in \operatorname{Im}(u)$

  Donc $\exists x \in E$ tq $y = u(x)$

  Or $E = \operatorname{Ker}(u) \oplus G$

donc $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in \ker(u)$
$x_2 \in G$

<u>Alors</u> $y = u(x)$

$$= u(x_1) + u(x_2)$$

$$= 0 + \tilde{u}(x_2)$$

donc y a un antécédent par $\tilde{u}$.

<u>Bref</u> : $\tilde{u}$ isomorphisme.

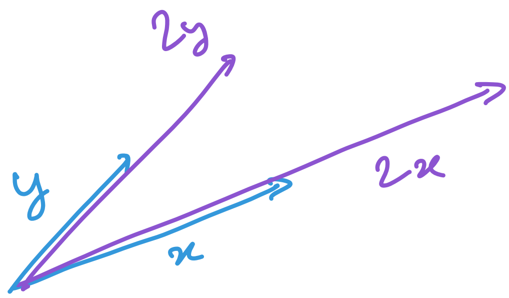
21. Que signifie $u \circ v = 0$?

$$\mathrm{Im}\, v \subset \mathrm{Ker}\, u$$

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "v"] \arrow[rr, bend left, "u \circ v"] & F \arrow[r, "u"] & G \\
x \arrow[r, mapsto] & v(x) \arrow[r, mapsto] & u(v(x))
\end{tikzcd}$$

22. Qu'est-ce qu'une homothétie ?

$$\lambda \mathrm{Id}_E : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda x \end{array}$$

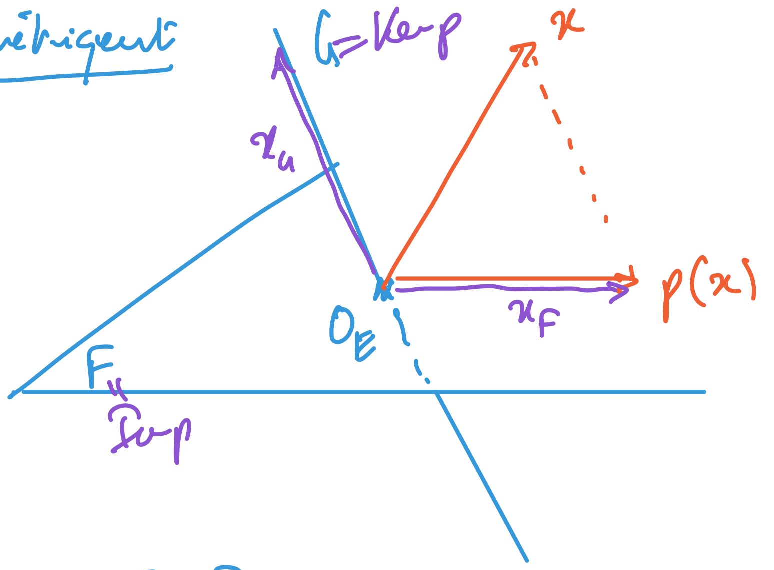


23. Que dire à propos des **projecteurs** ? des **symétries** ?

p projecteur lorsque $p \in \mathcal{L}(E)$ et $p \circ p = p$

"idempotent"

géométriquement



Si $E = F \oplus G$

le projecteur sur F de direction G

$$p : E \longrightarrow E$$
$$x \longmapsto \text{l'unique } x_F \text{ tq } x = x_F + x_G \in F \oplus G$$

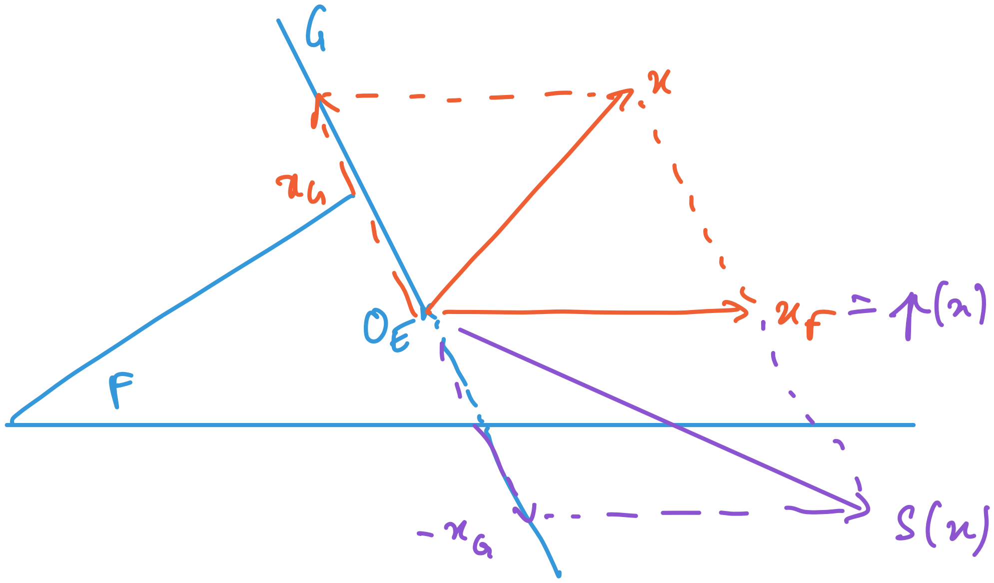
Caract : $p \circ p = p$

éléments géom de p ?

p projecteur sur $F = (\mathrm{Im}\, p)$, de direction $G = \ker p$

$= \ker(p - \mathrm{Id})$

Symétrie : $E = F \oplus G$



s symétrie par rapport à F, de direction G

$$s : E \longrightarrow E$$
$$x \longmapsto x_F - x_G$$

où $x = x_F + x_G \in F \oplus G$

Caract : $s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie $\Longleftrightarrow s \circ s = Id_E$

"involution".

$$F = \operatorname{Ker}(s - Id_E)$$
$$G = \operatorname{Ker}(s + Id_E)$$

Rmq : lien entre s et p. $\quad s + Id_E = 2p$

1.3 Sous-espaces vectoriels en somme directe

Définition. Dans le contexte du paragraphe précédent, on dit que les F_i **sont en somme directe** si et seulement si :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p,\ x_1 + \cdots + x_p = 0 \implies x_1 = \cdots = x_p = 0$$

Dans ce cas, pour indiquer que les F_i sont en somme directe, on modifie la notation, et on note $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i$ pour désigner $\sum_{i=1}^{p} F_i$.

Remarque. *Ça signifie que la seule façon de construire 0_E comme somme de vecteurs des F_i est de l'écrire comme somme de 0_{F_i}.*

Remarque. *Dans le cas de deux sous-espaces vectoriels, on peut vérifier que cette proposition est équivalente à $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$. Mais ça ne se généralise pas au cas de plus de deux sous-e.v.*

Théorème.

En conservant les notations précédentes, les F_i sont en somme directe si et seulement si tout vecteur x de $\sum_{i=1}^{p} F_i$ se décompose **de façon unique** selon les F_i, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \sum_{i=1}^{p} F_i,\ \exists! (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p \text{ t.q. } x = \sum_{i=1}^{p} x_i$$

Remarque. *Lorsque $x \in \sum_{i=1}^{p} F_i$, il peut s'écrire $x = x_1 + \cdots + x_p$. On dit que l'on a écrit une décomposition de x selon $\sum_{i=1}^{p} F_i$. Si les F_i sont en somme directe, cette décomposition est unique. On parle alors de **la décomposition de** x selon $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i$.*

Remarque. *On trouve parfois la définition – équivalente, mais peu utile en pratique – de sous-espaces en somme directe :*

$$\forall i \in \{1, \dots, p\},\ F_i \cap \Big(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} F_j \Big) = \{0_E\}$$

Bon, ça vaut le coup d'y réfléchir un peu quand même, par exemple en petite dimension.

Preuve : (du théorème)

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que tout vecteur de $\sum F_i$ se décompose de façon unique selon $\sum F_i$

Mq la somme est directe.

Soit $x_1 \in F_1, \dots, x_p \in F_p$ tq $x_1 + \dots + x_p = 0_E$

On a aussi $0_E = \underset{F_1}{0} + \dots + \underset{F_p}{0}$

par unicité, $x_1 = 0, \dots, x_p = 0$

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose la somme directe.

On veut montrer l'unicité de l'écriture de tout vecteur de $\sum F_i$

Soit $x \in \sum_{i=1}^{p} F_i$

On suppose $x = \underset{\in F_1}{x_1} + \cdots + \underset{\in F_p}{x_p}$

$= \underset{\in F_1}{y_1} + \cdots + \underset{\in F_p}{y_p}$

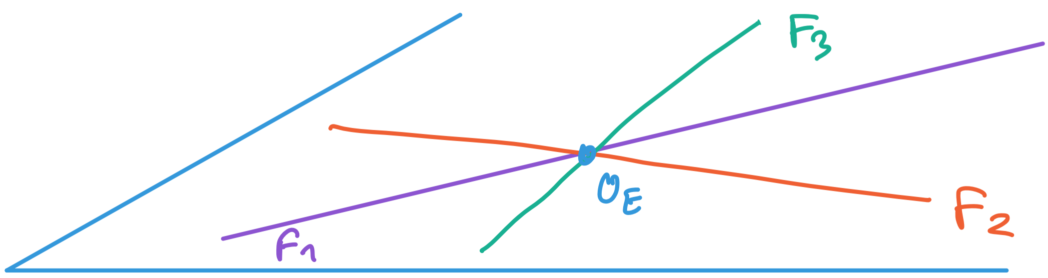
donc $\underbrace{(x_1 - y_1)}_{\in F_1} + \cdots + \underbrace{(x_p - y_p)}_{\in F_p} = 0_E$

or la somme $\sum F_i$ est directe

donc $x_1 - y_1 = 0 \quad \cdots \quad x_p - y_p = 0$

c'est-à-dire que l'écriture de x dans $\sum F_i$ est unique.

Remarque:



$F_1 \cap F_2 \cap F_3 = \{0_E\}$

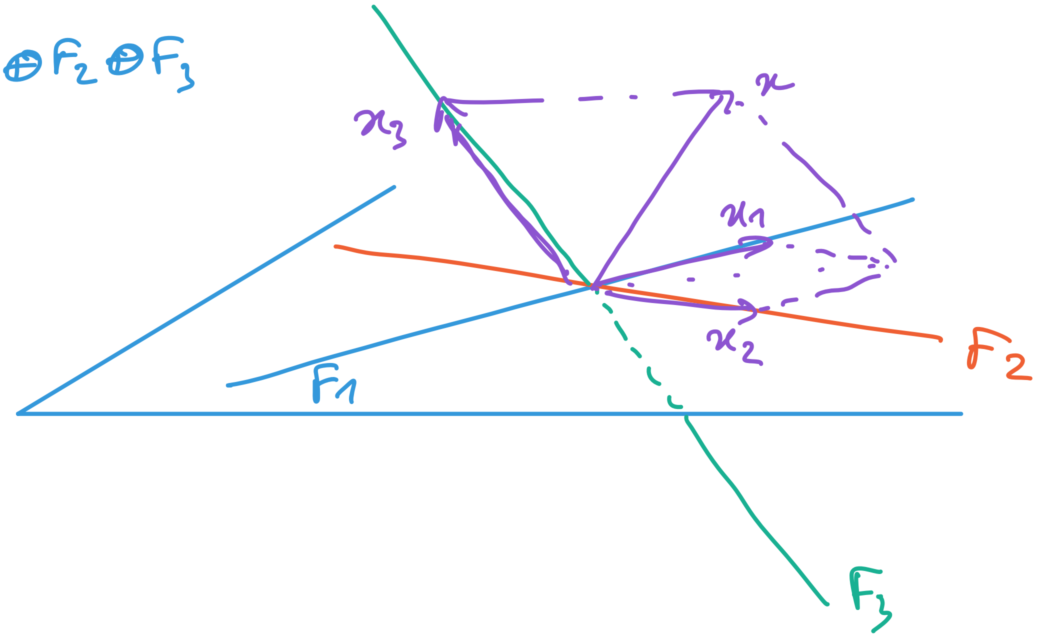
La somme $F_1 + F_2 + F_3$ n'est pas directe.

1.4 Projecteurs associés à une décomposition de E en somme directe

Proposition. Si $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$, on peut définir, pour tout i, le projecteur p_i sur F_i de direction $\bigoplus_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{p} F_k$. Alors :

$$\mathrm{Id}_E = \sum_{i=1}^{p} p_i \quad \text{et, pour } i \neq j, \quad p_i \circ p_j = 0$$

$E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$



$p_1 : x \longmapsto x_1$

$p_2 : x \longmapsto x_2$

$p_3 : x \longmapsto x_3$

On a $\quad \mathrm{Id}_E = p_1 + p_2 + p_3$

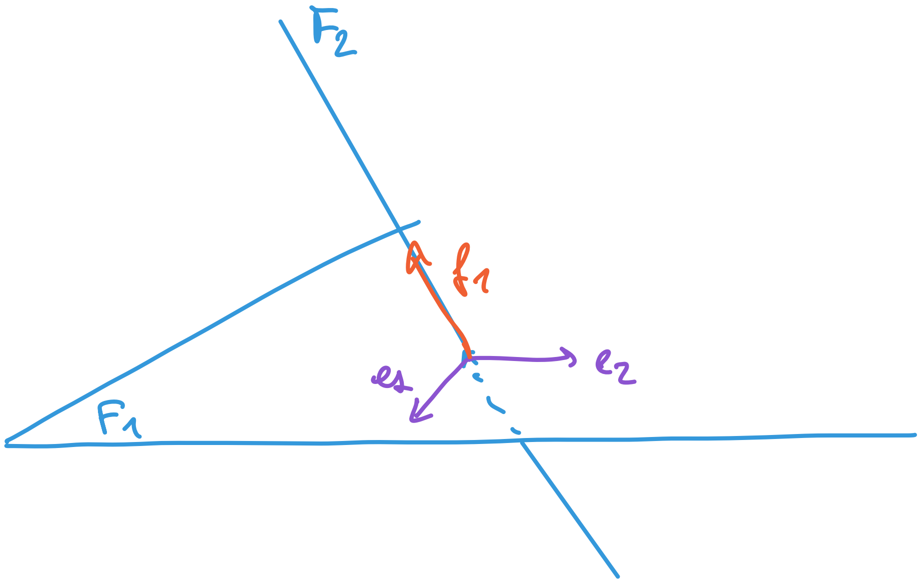
et $p_i \circ p_j = 0 \quad \forall i \neq j$

1.5 Sommes directes et bases

On conserve les notations précédentes, et on se place dans un espace de dimension finie.

Proposition. Soit $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ des bases respectives de $F_1, \dots, F_p$. On note $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$ la concaténation de ces p bases.

Si les F_i sont en somme directe, alors $\mathcal{B}$ est une base de $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i$, dite **adaptée à cette somme directe**.



Preuve: Notons $\mathcal{B}_1 = (e_1^1, \dots, e_{m_1}^1)$

$\mathcal{B}_2 = (e_1^2, \dots, e_{m_2}^2)$

$\vdots$

$\mathcal{B}_p = (e_1^p, \dots, e_{m_p}^p)$

$$\mathcal{B} = (e_1^1, \dots, e_{m_1}^1, e_1^2, \dots, e_{m_2}^2, \dots, e_1^p, \dots, e_{m_p}^p)$$

Mqe $\mathcal{B}$ base de $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i$

• liberté: Soit $\lambda_1^1, \dots, \lambda_{m_1}^1, \lambda_1^2 \dots \lambda_{m_2}^2 \dots$

tq

$$\underbrace{\lambda_1^1 e_1^1 + \dots + \lambda_{m_1}^1 e_{m_1}^1}_{\in F_1} + \dots + \underbrace{\lambda_1^p e_1^p + \dots + \lambda_{m_p}^p e_{m_p}^p}_{\in F_p} = 0$$

Comme les F_i sont en somme directe,

$$\begin{cases} \lambda_1^1 e_1^1 + \dots + \lambda_{n_1}^1 e_{n_1}^1 = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1^p e_1^p + \dots + \lambda_{n_p}^p e_{n_p}^p = 0 \end{cases}$$

or $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ sont libres

donc $\begin{cases} \lambda_1^1 = \dots = \lambda_{n_1}^1 = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1^p = \dots = \lambda_{n_p}^p = 0 \end{cases}$

D'où la liberté.

- Mq que $\mathcal{B}$ engendre $\bigoplus F_i$

Soit $x \in \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$

donc $\exists\, x_1 \in F_1, \dots, x_p \in F_p$

tq $x = x_1 + \dots + x_p$

or $\mathcal{B}_1$ engendre $F_1, \dots, \mathcal{B}_p$ engendre F_p

donc $\exists\, \lambda_1^1 \dots \lambda_{n_1}^1, \dots, \lambda_1^p \dots \lambda_{n_p}^p \in \mathbb{K}$

tq $\begin{cases} x_1 = \lambda_1^1 e_1^1 + \dots + \lambda_{n_1}^1 e_{n_1}^1 \\ \vdots \\ x_p = \lambda_1^p e_1^p + \dots + \lambda_{n_p}^p e_{n_p}^p \end{cases}$

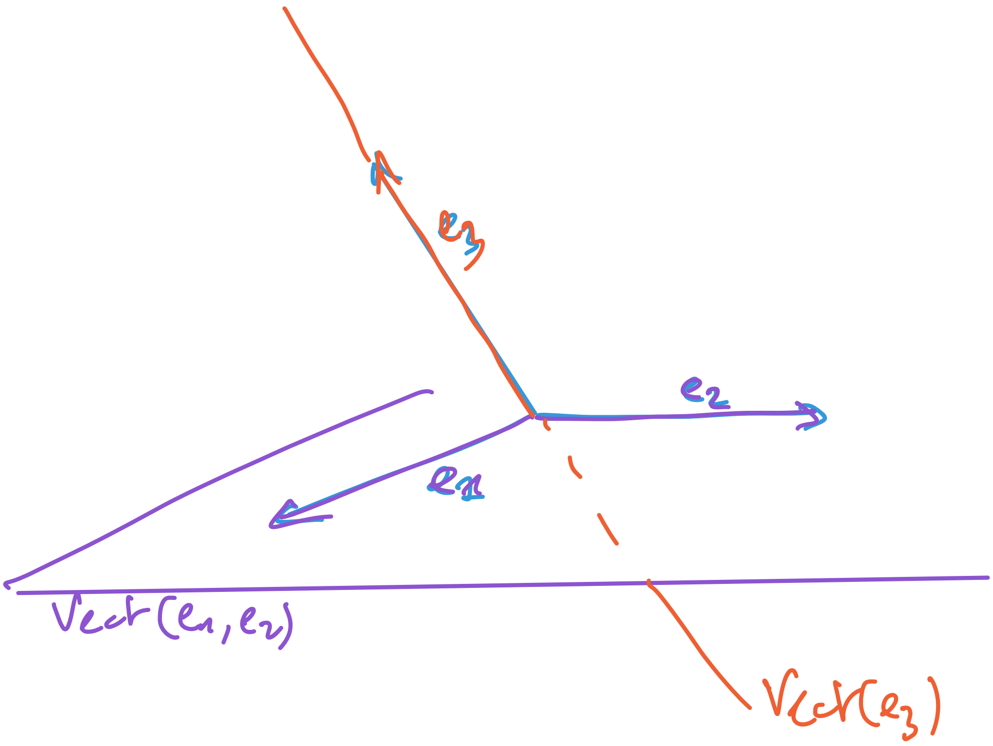
D'où $x = \lambda_1^1 e_1^1 + \dots + \lambda_{n_1}^1 e_{n_1}^1$

$+ \dots + \lambda_1^p e_1^p + \dots + \lambda_{n_p}^p e_{n_p}^p$

On peut proposer une « réciproque » à la proposition précédente, que l'on appelle **décomposition en somme directe obtenue par fractionnement d'une base** :

Proposition. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Si on organise et regroupe les vecteurs de $\mathcal{B}$ de façon à écrire $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$, alors :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_i)$$



$$\mathrm{Vect}(e_1, e_2) \oplus \mathrm{Vect}(e_3) = E$$

Théorème.

Soit $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de dimension finies de E. Alors on a :

$$\dim\Big(\sum_{i=1}^{p} F_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim F_i$$

avec égalité si et seulement si les F_i sont en somme directe.

<u>Preuve:</u> Soit $\varphi : \prod_{i=1}^{p} F_i \longrightarrow \sum_{i=1}^{p} F_i$

$$(x_1, \dots, x_p) \longmapsto x_1 + \dots + x_p$$

φ est linéaire, surjective par déf de $\sum_{i=1}^{p} F_i$

<u>donc</u> $\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leq \dim\left(\prod_{i=1}^{p} F_i\right)$

$$= \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$$

$$\ker \phi = \{ (x_1 \dots x_p) \text{ tq } x_1 + \dots + x_p = 0 \}$$

$\ker \phi = \{0\} \iff$ les F_i sont en somme directe.

$\Updownarrow$

ϕ injective

$\Updownarrow$

ϕ bijection $\iff \dim(\text{source}) = \dim(\text{but})$

1.6 Cas de deux sous-espaces vectoriels, espaces supplémentaires

Définition. Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont dits **supplémentaires** dans E si et seulement si $E = F \oplus G$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} E = F + G \\ F \text{ et } G \text{ sont en somme directe} \end{cases}$$

Exemple. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

M1 ~~Rmq~~ : $\tau : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M^T \end{array}$ linéaire

$M \in S_n(\mathbb{R}) \iff M^T = M$

donc $S_n(\mathbb{R}) = \ker(\tau - Id_E)$

est un ev.

Rmq : $\tau \circ \tau = Id_E$

donc τ est une symétrie

C'est la symétrie par rapport à $\underbrace{\ker(\tau - Id_E)}_{S_n(\mathbb{R})}$

de direction $\underbrace{\ker(\tau + Id_E)}_{\in A_n(\mathbb{R})}$

Donc $S_n \oplus A_n = M_n(\mathbb{R})$

M2 Analyse-synthèse.

Analyse :

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$

On suppose que $M = S + A$ $\quad S \in S_n$ et $A \in A_n$

Alors $M^T = S - A$

donc $S = \frac{M+M^T}{2}$ et $A = \frac{M-M^T}{2}$

D'où l'unicité au niveau d'existence

Synthèse : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

On pose $S = \frac{M+M^T}{2}$, $A = \frac{M-M^T}{2}$

On a $A+S = M$ et $S \in \mathcal{S}_n$ et $A \in \mathcal{A}_n$

D'où l'existence (et pas l'unicité)

M3 • Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ok !

$$M = \underbrace{\frac{M+M^T}{2}}_{\in \mathcal{S}_n} + \underbrace{\frac{M-M^T}{2}}_{\in \mathcal{A}_n}$$

donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n + \mathcal{A}_n$

• Soit $M \in \mathcal{S}_n \cap \mathcal{A}_n$

Alors $M^T = M$ et $M^T = -M$

donc $M = 0$

donc $\mathcal{S}_n \cap \mathcal{A}_n = \{0\}$ donc la somme est directe.

Th dim $\mathcal{A}_n = \frac{n(n-1)}{2}$ dim $\mathcal{S}_n = \frac{n(n+1)}{2}$

car $\mathcal{A}_n = \mathrm{Vect}\left(E_{ij} - E_{ji}\right)_{i<j}$ $\mathcal{S}_n = \mathrm{Vect}\left(E_{11}, \dots, E_{nn}, E_{ij} + E_{ji}, i<j\right)$

et $\mathcal{A}_n \cap \mathcal{S}_n = \{0\}$

d'où le résultat

Exemple. On note $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux nuls. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

<u>Analyse</u> Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On suppose $M = S + T$ où $S \in \mathcal{S}_n$ et $T \in \mathcal{T}_n^+$

$\forall i j \quad m_{ij} = s_{ij} + t_{ij}$

et $\forall i \geq j \quad t_{ij} = 0$

donc $s_{ij} = m_{ij}$

et $\forall i < j \quad s_{ij} = s_{ji}$

$= m_{ji}$

donc $t_{ij} = m_{ij} - m_{ji}$

<u>Bref</u> :

$$S = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & \cdots & m_{n1} \\ m_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & m_{n\,n-1} \\ m_{n1} & \cdots & & m_{nn} \end{pmatrix}$$

et
$$T = \begin{pmatrix} 0 & m_{12} - m_{21} & \cdots & m_{1n} - m_{n1} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & m_{n-1,n} - m_{n,n-1} \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Synthèse</u> : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

S, T définis comme ci-avant.

On a bien $M = S + T$, $S \in \mathcal{S}_n$, $T \in \mathcal{T}_n^+$

Rappel. Caractérisation par décomposition unique.
En dimension finie, caractérisation utilisant un argument de dimension.
En dimension finie, caractérisation utilisant des bases.

Définition. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et F un sous-espace vectoriel de E de dimension p.
On appelle **base de E adaptée à F** toute base de E obtenue en complétant une base de F en une base de E.

Remarque. *Une telle base existe toujours par le théorème de la base incomplète.*

Rappel. Projecteurs et symétries ont été étudiés en première année.