Pour me 21.1, 21.4, 21.12

Compléments d'algèbre linéaire

Je me souviens

1. Qu'est-ce qu'un **espace vectoriel** ? Comment on montre qu'un ensemble est un espace vectoriel ?
2. Citer des exemples d'espaces vectoriels.
3. Y a-t-il une bonne réprésentation géométrique des espaces vectoriels ?

(1) Un ev est $(E, +, \cdot)$ tq $(E, +)$ groupe abélien

et $\cdot$ loi de comp. externe $\mathbb{K} \times E \longrightarrow E$

$(\lambda, x) \longmapsto \lambda . x$

$\mathbb{K}$ corps $(\mathbb{K}, +, \times)$

tq

$$\lambda . (x+y) = \lambda . x + \lambda . y$$

$$(\lambda + \mu) . x = \lambda . x + \mu . x$$

$$(\lambda \times \mu) . x = \lambda . (\mu . x)$$

$$1 . x = x$$

E ev = ensemble stable par CL

②

$\mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$

$\mathbb{R}^{[a,b]} = \mathcal{F}([a,b] \to \mathbb{R})$, $\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ $\mathbb{K}$ corps $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{Q}$)

$\hookrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

$\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

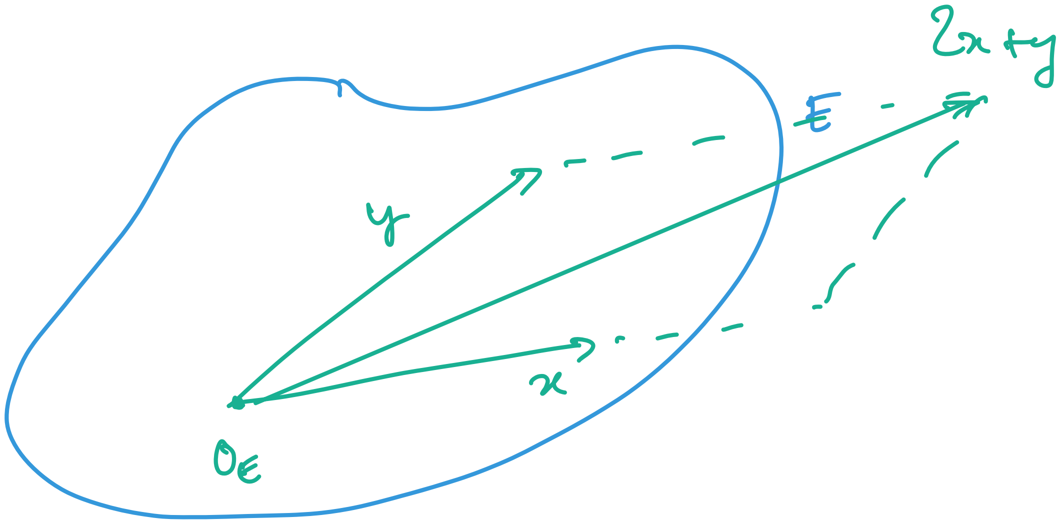
mque F ev $\longrightarrow$ on montre que c'est sous-ev d'un espace de référence.

en montrant : $\left| \begin{array}{l} F \subset E \\ 0_E \in F \quad (\text{ie } F \neq \emptyset) \\ F \text{ stable par CL} \end{array} \right.$

$\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ / $\mathbb{Q}$ est un ev	sur $\mathbb{C}$	Non	Non
	sur $\mathbb{R}$	oui	Non
	sur $\mathbb{Q}$	oui	oui

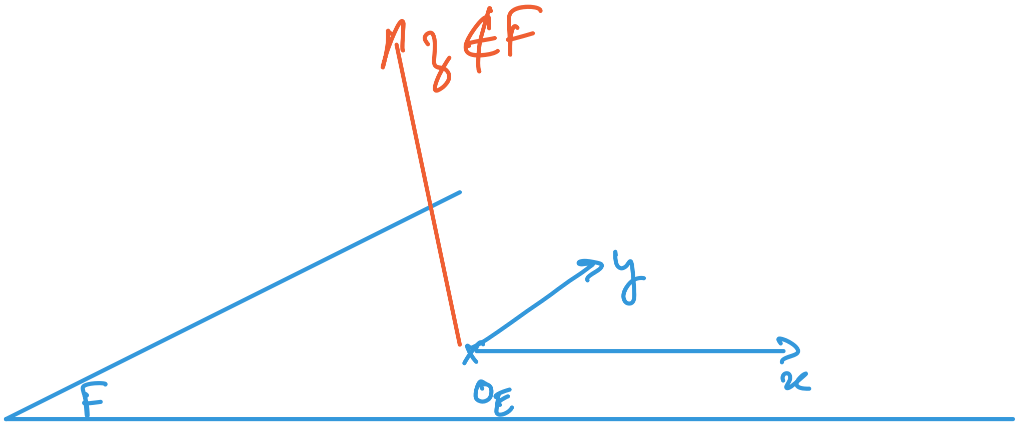
bizarre : × et · se confondent.



$\mathbb{R}^3$

E

$\mathbb{K}[X]$



Plan / droites / espace de dim 3

passant par $\underline{\underline{O_E}}$.

4. Comment montrer que deux sous-espaces vectoriels sont égaux ?

Mq que $F = G$

M1 Mq que $F \subset G$ et $G \subset F$.

M2 Mq que $F \subset G$ et $\dim F = \dim G$ $(< +\infty)$

M3 Mq que $F = \mathrm{Vect}(a_1, \dots, a_p) \subset G = \mathrm{Vect}(b_1 \dots b_q)$

$\forall i \quad a_i \in G$

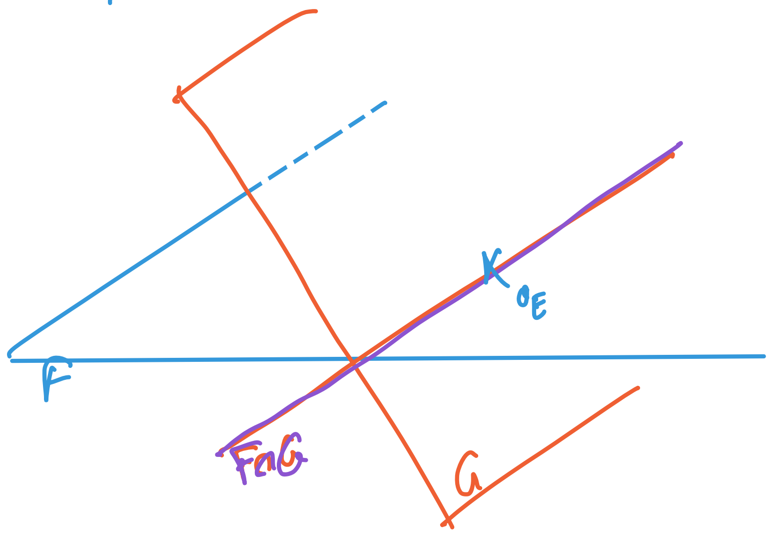
et G stable par CL

donc $\mathrm{Vect}(a_1 \dots a_p) \subset G$.

5. Union, intersection de sous-espaces vectoriels ?

6. Somme de deux sous-espaces vectoriels ?

F, G sous-ev de E.

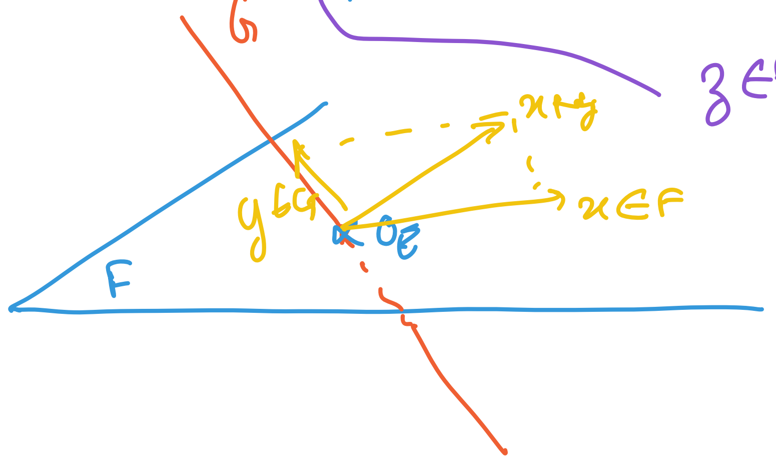


$F \cap G$ stable par CL $\to$ sous-ev.

$F \cup G$ NON

6) $F+G = \{ x+y, \ x \in F, y \in G \}$

$z \in F+G \Leftrightarrow \exists x \in F, y \in G$ tq $z = x+y$



$F+G$ est un ev.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $\quad \vec{I_n}$ $\quad \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ $\quad \vec{\cos}$

7. Qu'est-ce qu'une **combinaison linéaire** ?

u est CL de $(a_1, \dots, a_k)$

signifie $\exists \lambda_1 \dots \lambda_k$ tq $u = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot \vec{a_i}$

f est CL de $(x \overset{f_n}{\mapsto} \cos(nx))_{n \in \mathbb{N}}$

~~signifie $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$ tq~~

$$\cancel{f = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k f_k}$$

CL famille infinie $\overset{\text{déf}}{=}$ CL d'une sous-famille finie

f CL de $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$

$\Longleftrightarrow \exists N, \exists \lambda_0 \dots \lambda_N$ tq $f = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k f_k$

8. Qu'est-ce qu'une famille libre ? Y a-t-il des familles automatiquement libres ?

9. Qu'est-ce qu'une famille liée ? Y a-t-il des familles automatiquement liées ?

$(x_i)_{i \in I}$ libre signifie

si 0 est CL de $(x_i)_{i \in I}$ alors

c'est la CL triviale ($\lambda_i = 0 \ \forall i$)

1er cas : si $I = \{1, \dots, n\}$

$(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ libre signifie

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0 \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \right)$$

2e cas si I qcq

$(x_i)_i$ libre signifie

$$\left(\forall J \subset I, \ J \text{ fini}, \ \forall (\lambda_j)_{j \in J} \in \mathbb{K}^J \quad \sum_{j \in J} \lambda_j x_j = 0 \implies \lambda_j = 0 \ \forall j \right)$$

Exemple : $\left(x \xmapsto{f_\alpha} x^\alpha \right)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ famille de $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$

montrer la liberté :

Étudier d'abord $\left(x \mapsto x^{1/2}, x \mapsto x^2, x \mapsto x^5 \right)$

Soit $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tq $\lambda f_{1/2} + \mu f_2 + \nu f_5 = 0$

$$\lambda x^{1/2} + \mu x^2 + \nu x^5 = 0 \quad \forall x > 0$$

(en part. pour $x=1$: $\lambda+\mu+\nu=0$

$x=2$: $\sqrt{2}\lambda+4\mu+32\nu=0$

$x=3$: ...)

Si $\nu\neq 0$

$$\underbrace{\lambda x^{1/2}+\mu x^2+\nu x^5}_{\underset{+\infty}{\sim}\ \nu x^5 \ \xrightarrow{+\infty}\ \pm\infty} = 0 \xrightarrow{x\to+\infty} 0$$

contradiction

donc $\nu=0$

$\left(x \overset{f_\alpha}{\longmapsto} x^\alpha\right)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ libre ?

~~Soit $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ sous-famille finie de $\mathbb{R}$~~

~~Mque $(f_{\alpha_1},\dots,f_{\alpha_n})$ libre~~

~~Soit $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ tq $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f_{\alpha_k}=0$~~

~~ie $\forall x\in\mathbb{R}$ $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x^{\alpha_k}=0$~~

Montrons par récurrence :

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall \alpha_1\dots\alpha_n$, $(f_{\alpha_1}\dots f_{\alpha_n})$ libre.

- (f_{α_1}) libre car $f_{\alpha_1}\neq 0$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose

$\forall \alpha_1 \dots \alpha_n$ $(f_{\alpha_1} \dots f_{\alpha_n})$ libre.

Soit alors $\alpha_1 \dots \alpha_n\ \alpha_{n+1} \in \mathbb{R}$ distincts

Mq $(f_{\alpha_1} \dots f_{\alpha_{n+1}})$ libre.

Soit $\lambda_1 \dots \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}$ tq $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f_k = 0$

ie $\forall x$ $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x^{\alpha_k} = 0$

Soit k_0 tq $\alpha_{k_0} = \max_{k=1}^{n+1} (\alpha_k)$

On suppose $\lambda_{k_0} \neq 0$

Alors $\underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x^{\alpha_k}}_{=0} \underset{+\infty}{\sim} \lambda_{k_0} x^{\alpha_{k_0}}$ $\xrightarrow[+\infty]{} \pm\infty$

$\longrightarrow \lambda_{k_0}$

$\xrightarrow[0]{} \pm\infty$

si $\alpha_k > 0$

$\alpha_k = 1$

$\alpha_{k_0} < 0$

$0 \xrightarrow{+\infty} 0$

absurde donc $\lambda_{k_0} = 0$

Or $(f_{\alpha_k})_{\substack{1 \leq k \leq n+1 \\ k \neq k_0}}$ est libre par HR

donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n+1} = 0$

(M2)

Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ sous-famille finie de $\mathbb{R}$

Mque $(f_{\alpha_1}, \dots, f_{\alpha_n})$ libre

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tq $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_{\alpha_k} = 0$

i.e $\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x^{\alpha_k} = 0$

Supposons les λ_k non tous nuls.

Soit k_0 = indice tq $\alpha_{k_0} = \max\{\alpha_k, \lambda_k \neq 0\}$

si $\alpha_{k_0} > 0$

si $\alpha_{k_0} < 0$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x^{\alpha_k}}_{=\,0} \underset{x \to +\infty}{\sim} \lambda_{k_0} x^{\alpha_{k_0}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \pm\infty \qquad \xrightarrow[x \to 0]{} \pm\infty$$

Contradiction $\longrightarrow$ les λ_k sont tous nuls.

Familles libres :

1 vecteur non nul = libre

2 vecteurs non colinéaires = libre

↳ ça se voit

3 vecteurs non coplanaires = libre

↳ ça ne se voit pas

Familles de polynôme échelonnées en degré

$\longrightarrow$ libre.

Familles échelonnée dans $\mathbb{R}^n$ ou $M_{n,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- liée = non libre.

10. Que désigne la notation Vect(A) ?

11. Qu'est-ce qu'une famille génératrice ?

Vect (A) = plus petit sous-ev de E qui contient A

= { CL de vecteurs de A }

A engendre E $\iff$ E = Vect(A)

A famille génératrice.

12. Qu'est-ce qu'une base ? Pourquoi est-ce intéressant ?

13. Quand la base est **canonique**, ça veut dire quoi ?

libre et génératrice

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base E.

un vecteur x de E est représenté par $(x_1 \dots x_n)$

ses coordonnées dans $\mathcal{B}$

$$E \xleftrightarrow{\text{isomorphisme}} \mathbb{K}^n \qquad \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$$

$$x \longleftrightarrow (x_1 \dots x_n) \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Remarque :

$E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

$u_0 = (1, 0, 0, \dots)$

$u_1 = (0, 1, 0, \dots)$

$\vdots$

$u_k = (0 \dots 0, \underset{k+1}{1}, \dots)$

est-ce que $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ engendre E ?

c'est une suite

NON $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ n'engendre que les suites nulles à partir d'un certain rang.

$$(1)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1, 1, 1 \dots)$$

$$= u_0 + u_1 + u_2 + \dots$$ pas une CL (pas finie)

$(1, 0, \dots)$ $(0, 1, 0, \dots)$

$\mathbb{R}[X] = \{$ suites nulles à partir d'un certain rang $\}$.

$$(1, X, X^2, \dots, X^n, \dots)$$

14. Citer le théorème de la base incomplète.

15. Citer le théorème de la base extraite.

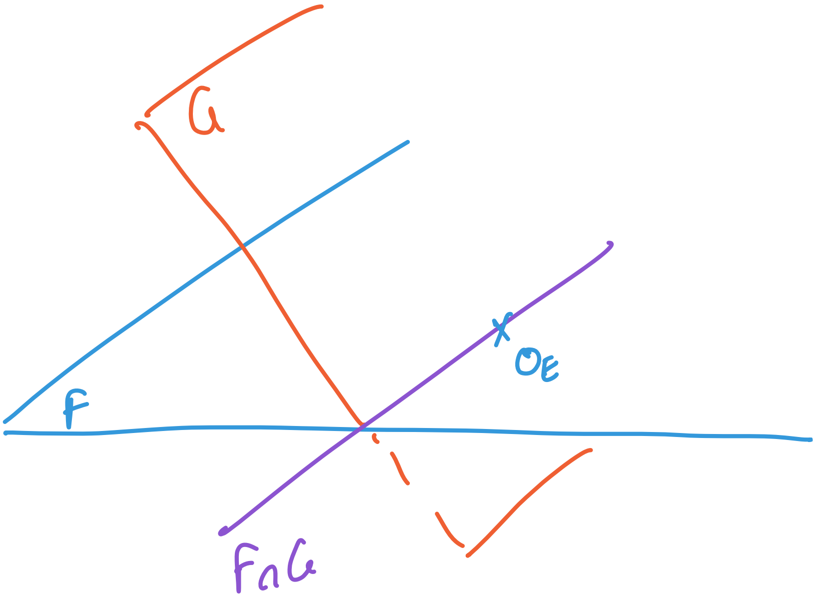
Théorème

Dans E de dim finie.

* Toute famille libre peut être complétée en une base.

* De toute famille génératrice, on peut extraire une base.

16. Énoncer la formule de Grassmann.



$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

1 Produit et somme d'espaces vectoriels

1.1 Produit d'espaces vectoriels

Définition. Soit $E_1, \ldots, E_p$ des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. On appelle **produit (cartésien)** des e.v. l'ensemble :

$$E_1 \times \cdots \times E_p = \prod_{i=1}^{p} E_i = \{(x_1, \ldots, x_p) \text{ où } \forall i \in \{1, \ldots, p\},\ x_i \in E_i\}$$

On munit cet ensemble des deux lois $+$ et $\cdot$ définies par :

$$\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_p) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_p)$$
$$(x_1, \ldots, x_p) + (y_1, \ldots, y_p) = (x_1 + y_1, \ldots, x_p + y_p)$$

où $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(x_1, \ldots, x_p), (y_1, \ldots, y_p) \in \prod_{i=1}^{p} E_i$.

Proposition. Muni de ces deux opérations, $\prod_{i=1}^{p} E_i$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition. Lorsque $E_1, \ldots, E_p$ sont de dimensions finies, notées respectivement $n_1, \ldots, n_p$, alors $\prod_{i=1}^{p} E_i$ est de dimension finie, et sa dimension est $\sum_{i=1}^{p} n_i$.

Exemple. $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel de dimension 1 sur $\mathbb{K}$. $\mathbb{K}^p$ est un espace vectoriel produit sur $\mathbb{K}$, de dimension p.

$(E_1, +, \cdot)$ et $(E_2, +, \cdot)$ deux $\mathbb{K}$-ev.

$F = E_1 \times E_2 = \{ (x_1, x_2) \text{ où } x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2 \}$

F est muni de $+$ en posant

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

$(F, +)$ groupe commutatif.

F est muni de $\cdot$ en posant

$$\lambda \cdot (x_1, x_2) = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2)$$

On vérifie les 4 axiomes de déf des ev.

<u>prop</u> : $\dim(E_1 \times E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2)$

<u>preuve</u>: soit $(e_1, \dots, e_p)$ base de E_1

$(f_1, \dots, f_q)$ base de E_2

<u>Notons</u> $\mathcal{B} = \big((e_1, 0), \dots (e_p, 0), (0, f_1) \dots (0, f_q) \big)$

on peut vérifier [...] que c'est

une base de $E_1 \times E_p$.

1.2 Somme de sous-espaces vectoriels

Définition. Soit $F_1, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E. On appelle **somme** des sous-e.v. l'ensemble :

$$F_1 + \cdots + F_p = \sum_{i=1}^{p} F_i = \left\{ x \in E \text{ t.q. } \exists (x_1, \ldots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p,\ x = \sum_{i=1}^{p} x_i \right\}$$

Lemme. La somme de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition. Avec les mêmes notations, on a :

$$\sum_{i=1}^{p} F_i = \text{Vect}\left(\bigcup_{i=1}^{p} F_i \right)$$

preuve:

- $\sum_{i=1}^{p} F_i \subset E$
- $0_E = \underbrace{0}_{\in F_1} + \cdots + \underbrace{0}_{\in F_p} \in \sum_{i=1}^{p} F_i$
- Soit $x, y \in \sum_{i=1}^{p} F_i$ $\quad \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

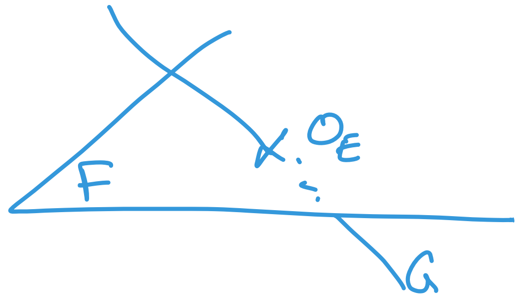
  ie $x = x_1 + \cdots + x_p$ où $x_i \in F_i$

  $y = y_1 + \cdots + y_p$ où $y_i \in F_i$

$$\lambda x + \mu y = \lambda(x_1 + \cdots + x_p) + \mu(y_1 + \cdots + y_p)$$
$$= \underbrace{(\lambda x_1 + \mu y_1)}_{\in F_1} + \cdots + \underbrace{(\lambda x_p + \mu y_p)}_{\in F_p}$$
$$\in \sum_{i=1}^{p} F_i$$

Ainsi $\sum F_i$ sous-ev de E

Rq $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} F_i = \mathrm{Vect}\left(\bigcup_{i=1}^{p} F_i\right)$



$\boxed{\supset}$ • Soit $x \in \bigcup_{i=1}^{p} F_i$

i.e. $\exists i$ tq $x \in F_i$

donc $x = \underbrace{0}_{\in F_1} + \dots + \underbrace{x}_{\in F_i} + \dots + \underbrace{0}_{\in F_p}$

$\in \sum_{i=1}^{p} F_i$

• Ainsi $\bigcup_{i=1}^{p} F_i \subset \sum_{i=1}^{p} F_i$

or $\sum F_i$ ev donc stable par CL

donc $\mathrm{Vect}\left(\bigcup_{i=1}^{p} F_i\right) \subset \sum_{i=1}^{p} F_i$.

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in \sum_{i=1}^{p} F_i$

ie $x = 1\underbrace{x_1}_{\in F_1 \subset \bigcup F_i} + \dots + 1\underbrace{x_p}_{\in F_p \subset \bigcup F_i}$

$\in \mathrm{Vect}\left(\bigcup_{i=1}^{p} F_i\right)$