Pour me 21.1, 21.4, 21.12

Compléments d'algèbre linéaire

Je me souviens

1. Qu'est-ce qu'un **espace vectoriel** ? Comment on montre qu'un ensemble est un espace vectoriel ?
2. Citer des exemples d'espaces vectoriels.
3. Y a-t-il une bonne réprésentation géométrique des espaces vectoriels ?

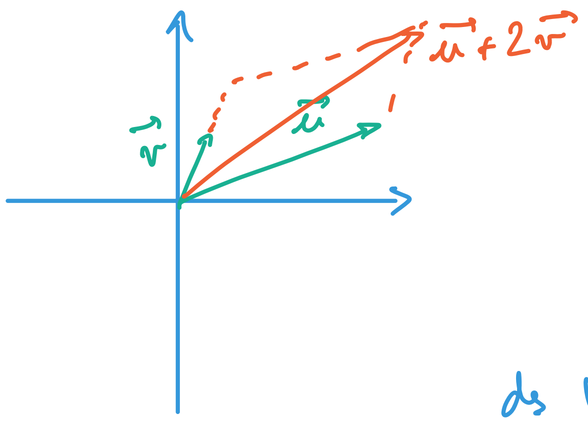
① ensemble $(E, +, \cdot)$ $+$ loi de c.i
$\cdot$ loi de ce

(déf → compliquée.

Stable par CL

On montre que c'est un sous-ev d'un espace de référence.

② Exemples $\mathbb{R}^2$



$\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}$

des $\mathbb{R}$-ev

les scalaires sont réels

$\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{R}_n[X]$,

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$

$\mathbb{C}^X = \mathcal{F}(X \to \mathbb{C})$ est $\mathbb{C}$-ev.

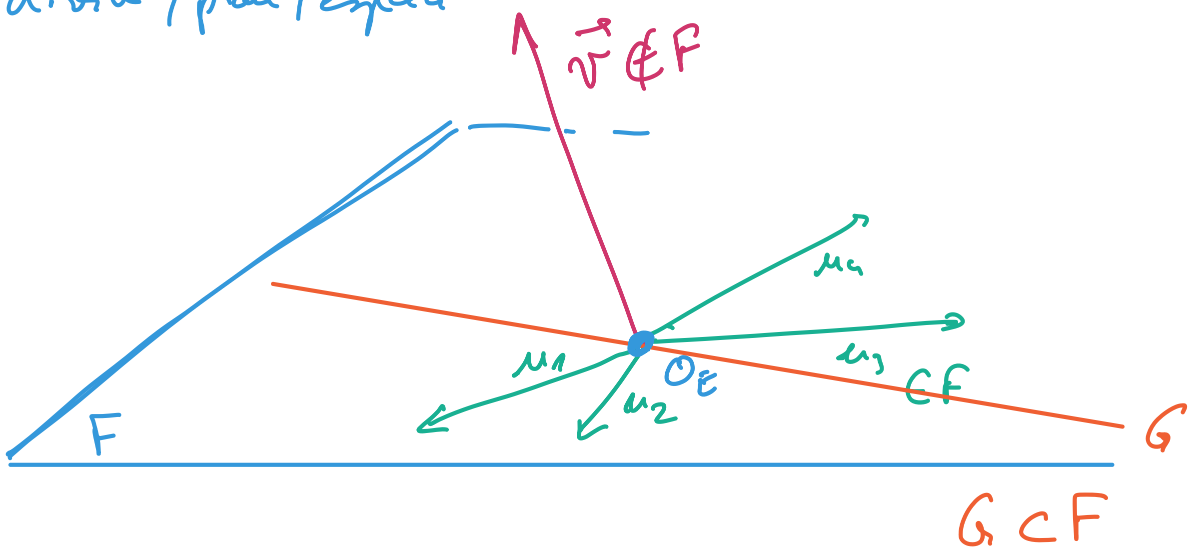
$\mathbb{R}^X$ $\mathbb{R}$ ev

$\mathcal{C}^0(X \to \mathbb{R})$ sous-ev de $\mathbb{R}^X$

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$,

(3) Les vecteurs sont issus du vecteur nul.

droite / plan / espace



4. Comment montrer que deux sous-espaces vectoriels sont égaux ?

Mque $F = G$

(M1) $F \subset G$ et $G \subset F$

Soit $x \in F$ .... et donc $x \in G$

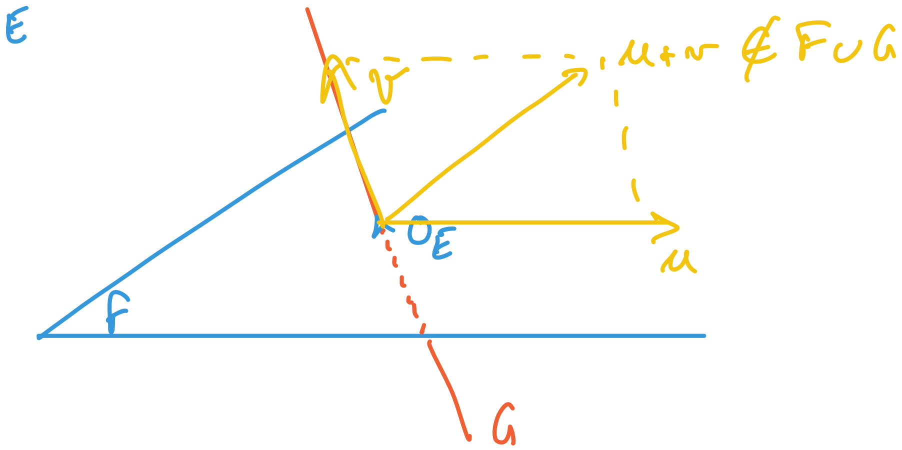
(M2) $F \subset G$ et $\dim F = \dim G$ $(< +\infty)$

(M3) base commune (rare)

Ca où $G = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_m)$

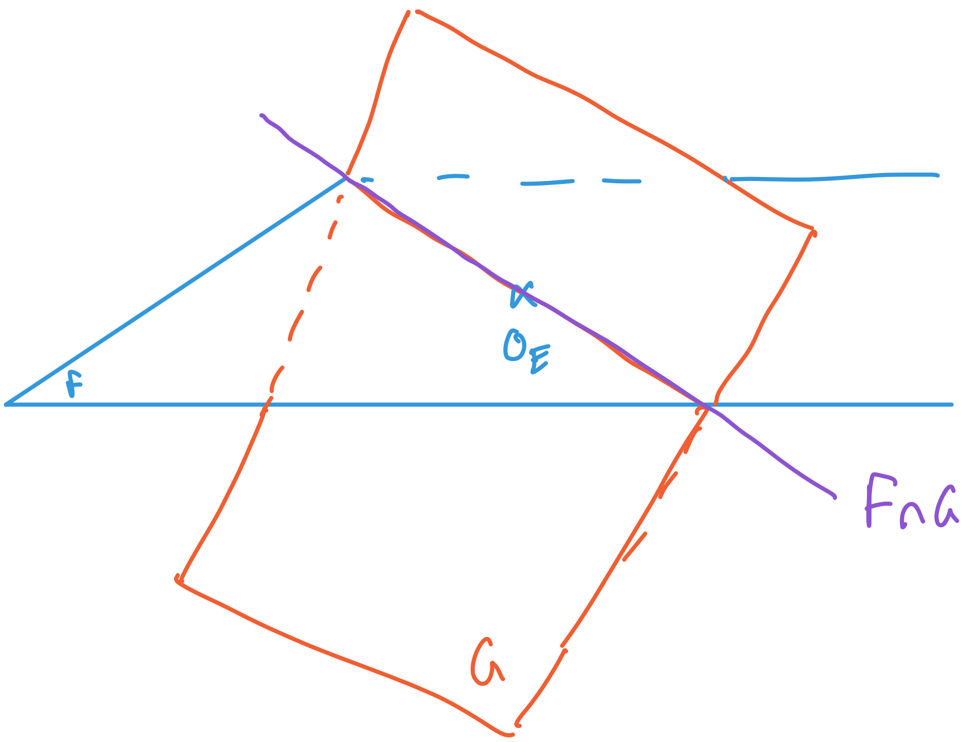
Mq $F \subset G$ et $e_1 \in F, \dots, e_m \in F$

5. Union, intersection de sous-espaces vectoriels ?
6. Somme de deux sous-espaces vectoriels ?



L'union de 2 sous-ev n'est pas un ev.

L'intersection de 2 sous-ev est un ev



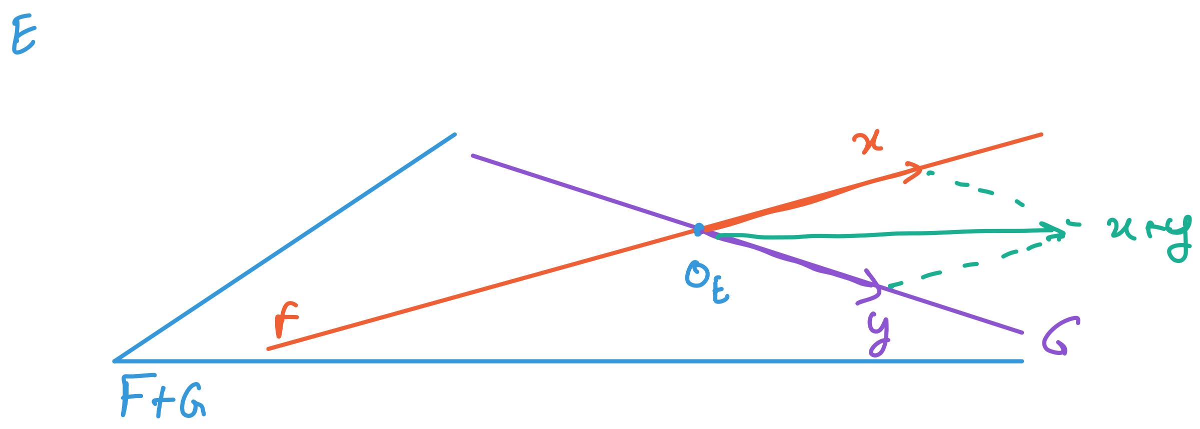
Car stable par CL.

Somme de 2 sous-ev

F, G 2 sous-ev de E

On définit $F+G = \{x+y,\ x\in F,\ y\in G\}$

$z \in F+G \iff \exists x\in F, \exists y \in G$ tq $z = x+y$



7. Qu'est-ce qu'une **combinaison linéaire** ?

CL de x et y : $\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}$ $\qquad \lambda, \mu \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

scalaire

$x, y \in E$

vecteurs

Dans le cas d'une famille infinie

dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ $\qquad (x \mapsto \cos(nx))_{n\in\mathbb{N}}$

CL de ces vecteurs :

$$\cancel{\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k \cos(kx)}$$

On ne sait faire que des sommes finies.

CL : somme finie de $\lambda \times$ vecteurs

CL de $(x \mapsto \cos(nx))_{n\in\mathbb{N}}$

est $x \mapsto \lambda_0 1 + \lambda_1 \cos x + \dots + \lambda_{n_0} \cos(n_0 x)$

$$\mathrm{Vect}\left(x \mapsto \cos(nx) \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$= \{ \text{CL de } \cos(nx) \}$$

$$= \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tq } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists \lambda_0, \dots, \lambda_{n_0} \in \mathbb{R} \text{ tq } f(x) = \lambda_0 1 + \lambda_1 \cos(x) + \dots + \lambda_{n_0} \cos(n_0 x) \}$$

Contient $\cos(2x)$ $3\cos(2x) + 7\cos(5x)$

...

8. Qu'est-ce qu'une famille libre ? Y a-t-il des familles automatiquement libres ?

9. Qu'est-ce qu'une famille liée ? Y a-t-il des familles automatiquement liées ?

$(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre signifie

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E \Longrightarrow \lambda_1 = \dots \lambda_n = 0 \right)$$

$(x_i)_{i \in I}$ est libre signifie

(si une CL de $(x_i)_i$ est nulle

alors les valeurs sont tous nuls)

c'est une CL finie, CL de toute sous-famille finie.

Exemple :

Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}) = E$

Est-ce que $\left(x \overset{f_1}{\longmapsto} \sqrt{x},\ x \overset{f_2}{\longmapsto} x^2,\ x \overset{f_3}{\longmapsto} x^3 \right)$ libre ?

Mq u'elle est libre.

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tq $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$

ie $\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ \lambda_1 \sqrt{x} + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 = 0$

M1 polynôme avec une infinité de racines

donc les coeff sont nuls : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

M2 Si $\lambda_3 \neq 0$, $\underbrace{\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x)}_{= 0 \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0} \underset{x \to +\infty}{\sim} \lambda_3 x^3 \to \pm\infty$

<u>contradiction</u> : donc $\lambda_3 = 0$

<u>Formalisation</u> :

Supposons les λ_k non tous nuls.

On considère $k_0 = \operatorname{Max}\{ k \mid \lambda_k \neq 0 \}$

Alors $\underbrace{\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x)}_{=\,0} \underset{+\infty}{\sim} \lambda_{k_0} f_{k_0}(x) \xrightarrow[+\infty]{} \pm\infty$

<u>contradiction</u>.

→ démo valable pour $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k = 0$

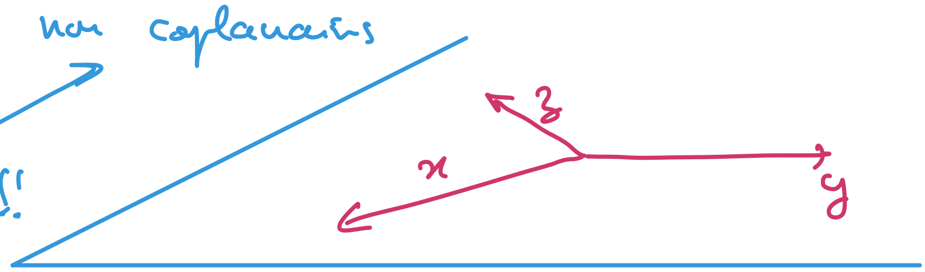
<u>Familles automatiquement libres</u> :

* 2 vecteurs <u>non colinéaires</u>
  ↳ ça se voit

* polynôme à degrés échelonnés.
* vecteurs échelonnés $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

* 3 vecteurs non coplanaires

<u>ça ne se voit pas !!</u>



10. Que désigne la notation Vect(A) ?

11. Qu'est-ce qu'une famille génératrice ?

Vect(A) = espace engendré par A

= { CL de vecteurs de A }.

= le plus petit sous-ev contenant A.

$\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((X^k)_{k \in \mathbb{N}} \right)$

$= \{ \text{CL des } X^k \}$

$= \{ \lambda_0 X^0 + \lambda_1 X^1 + \dots \lambda_n X^n \}$

$= \{ P \mid \exists n \in \mathbb{N},\ \exists \lambda_0 \dots \lambda_n \in \mathbb{R} \text{ tq } P = \lambda_0 + \lambda_1 X + \dots + \lambda_n X^n \}$

$= \mathbb{R}[X]$.

<u>Ainsi</u> $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est génératrice de $\mathbb{R}[X]$.

engendre $\mathbb{R}[X]$.

12. Qu'est-ce qu'une base ? Pourquoi est-ce intéressant ?

13. Quand la base est **canonique**, ça veut dire quoi ?

* base = libre et génératrice.
* représenter un vecteur par ses coordonnées.

E muni d'une base (e_1, e_2, e_3) sur $\mathbb{R}$

chaque $x \in E$ est représenté par ses coord

$(x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ tq $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$

$$E \xleftrightarrow{\text{isomorphisme}} \mathbb{R}^3 \qquad \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$$

$$x \longleftrightarrow (x_1, x_2, x_3) \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

<u>Base canonique</u> ça dépend.

la base à laquelle tout le monde pense.

$\mathbb{R}^3$ $\quad \mathcal{B}_c = \big((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\big)$

$\mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$ $\quad \mathcal{B}_c = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

$\mathbb{R}_2[X]$ $\quad \mathcal{B}_c = (1, X, X^2)$

$\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ $\quad \mathcal{B}_c = (E_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$ $\qquad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

14. Citer le théorème de la base incomplète.

15. Citer le théorème de la base extraite.

Théorique !

En dim finie

14 Toute famille libre peut être complétée en une base.

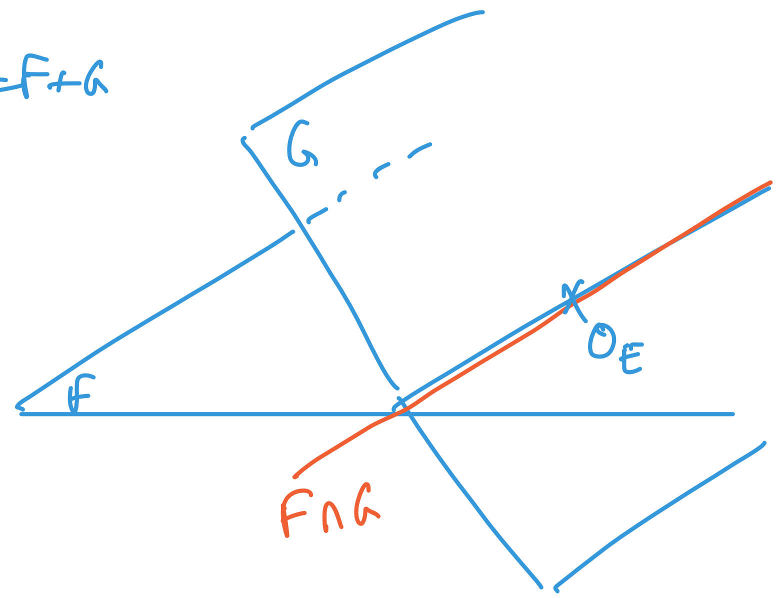
15 De toute famille génératrice, on peut extraire une base.

16. Énoncer la formule de Grassmann.

F, G deux sous-ev de E

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F\cap G)$$

$E = F + G$



1 Produit et somme d'espaces vectoriels

~~1.1~~ Produit d'espaces vectoriels

Définition. Soit $E_1, \ldots, E_p$ des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. On appelle **produit (cartésien)** des e.v. l'ensemble :

$$E_1 \times \cdots \times E_p = \prod_{i=1}^{p} E_i = \{(x_1, \ldots, x_p) \text{ où } \forall i \in \{1, \ldots, p\},\ x_i \in E_i\}$$

On munit cet ensemble des deux lois $+$ et $\cdot$ définies par :

$$\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_p) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_p)$$
$$(x_1, \ldots, x_p) + (y_1, \ldots, y_p) = (x_1 + y_1, \ldots, x_p + y_p)$$

où $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(x_1, \ldots, x_p), (y_1, \ldots, y_p) \in \prod_{i=1}^{p} E_i$.

Proposition. Muni de ces deux opérations, $\prod_{i=1}^{p} E_i$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition. Lorsque $E_1, \ldots, E_p$ sont de dimensions finies, notées respectivement $n_1, \ldots, n_p$, alors $\prod_{i=1}^{p} E_i$ est de dimension finie, et sa dimension est $\sum_{i=1}^{p} n_i$.

Exemple. $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel de dimension 1 sur $\mathbb{K}$. $\mathbb{K}^p$ est un espace vectoriel produit sur $\mathbb{K}$, de dimension p.

Soit $(E_1, +, \cdot)$ et $(E_2, +, \cdot)$ deux $\mathbb{K}$-ev

On note $F = E_1 \times E_2$

$= \{ (x_1, x_2) \mid x_1 \in E_1, x_2 \in E_2 \}$

On munit F de la structure produit (cartésien)

en posant : $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$

$\lambda \cdot (x_1, x_2) = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2)$

Alors $*$ $(F, +)$ est un groupe commutatif (le groupe produit)

$*$ $\lambda \cdot \big((x_1, x_2) + (y_1, y_2) \big)$

$= \big(\lambda \cdot (x_1, x_2) \big) + \big(\lambda \cdot (y_1, y_2) \big)$

$* \quad (\lambda + \mu) \cdot (x_1, x_2)$

$$= \lambda \cdot (x_1, x_2) + \mu (x_1, x_2)$$

$* \quad (\lambda \times \mu) \cdot (x_1, x_2)$

$$= \lambda \cdot (\mu \cdot (x_1, x_2))$$

$* \quad 1_{\mathbb{K}} \cdot (x_1, x_2) = (x_1, x_2)$

<u>À retenir</u> : le produit direct est un ev.
(lois naturels)

<u>Prop</u>: <u>Si</u> E_1 est de dim n_1

E_2 est de dim n_2

<u>Alors</u> $E_1 \times E_2$ est de dim $n_1 + n_2$.

<u>Preuve</u>: Soit $(e_1, .., e_{n_1})$ base de E_1

$(f_1, .., f_{n_2})$ base de E_2

Notons $\mathcal{B} = \left((e_1, 0), \dots (e_{n_1}, 0), (0, f_1) \dots (0, f_{n_2}) \right)$

On vérifie [...] que c'est une base de $E_1 \times E_2$

(x_1, x_2)

1.2 Somme de sous-espaces vectoriels

Définition. Soit $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E. On appelle **somme** des sous-e.v. l'ensemble :

$$F_1 + \cdots + F_p = \sum_{i=1}^{p} F_i = \left\{ x \in E \text{ t.q. } \exists (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p,\ x = \sum_{i=1}^{p} x_i \right\}$$

Lemme. La somme de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition. Avec les mêmes notations, on a :

$$\sum_{i=1}^{p} F_i = \mathrm{Vect}\left(\bigcup_{i=1}^{p} F_i \right)$$

Preuve:

- $F_1 + \dots + F_p \subset E$
- $0_E = \underbrace{0}_{\in F_1} + \dots + \underbrace{0}_{\in F_p} \in F_1 + \dots + F_p$
- Soit $x, y \in F_1 + \dots + F_p$

  ie $\exists x_1, x_2 \dots x_p, y_1 \dots y_p$ tq

  $x = x_1 + \dots + x_p$ et $y = y_1 + \dots + y_p$

  Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

  $$\lambda x + \mu y = \lambda (x_1 + \dots + x_p) + \mu (y_1 + \dots y_p)$$
  $$= \underbrace{(\lambda x_1 + \mu y_1)}_{\in F_1} + \dots + \underbrace{(\lambda x_p + \mu y_p)}_{\in F_p}$$
  $$\in F_1 + \dots + F_p$$

Donc $F_1 + \dots + F_p$ sous.ev de E.

Mq: $\sum_{i=1}^{p} F_i = \text{Vect}\left(\bigcup_{i=1}^{p} F_i\right)$

$\boxed{\supset}$ • Mque $\bigcup_{i=1}^{p} F_i \subset \sum_{i=1}^{p} F_i$

Soit $x \in \bigcup_{i=1}^{p} F_i$ ie $\exists i$ tq $x \in F_i$

donc $x = \underset{\in F_1}{0} + \dots + \underset{\in F_{i-1}}{0} + \underset{\in F_i}{x} + \underset{\in F_{i+1}}{0} + \dots + \underset{\in F_p}{0}$

$\in \sum_{i=1}^{p} F_i$

• Ainsi $\bigcup_{i=1}^{p} F_i \subset \sum_{i=1}^{p} F_i$

or $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est un ev donc stable par CL

donc $\text{Vect}\left(\bigcup_{i=1}^{p} F_i\right) \subset \sum_{i=1}^{p} F_i$

$\boxed{\subset}$ Mque $\sum_{i=1}^{p} F_i \subset \text{Vect}\left(\bigcup_{i=1}^{p} F_i\right)$

Soit $x \in \sum_{i=1}^{p} F_i$

ie $\exists x_1 \dots x_p$ tq

$x = 1\underset{\in \bigcup_{i=1}^{p} F_i}{x_1} + \dots + 1\underset{\in \bigcup_{i=1}^{p} F_i}{x_p} \in \text{Vect}\left(\bigcup_{i=1}^{p} F_i\right)$