- ex à rédiger

- Démarrage des colles

- Démarrage des DS

  Aménagements → G121 à 7h25

  ~~Primants 3, 4, 8 → B312 (Orsini)~~

  ~~Les autres → B317~~

  * stratégies   Pb 1

  choix des questions.

  ~~7 + 4~~

  7 − 4

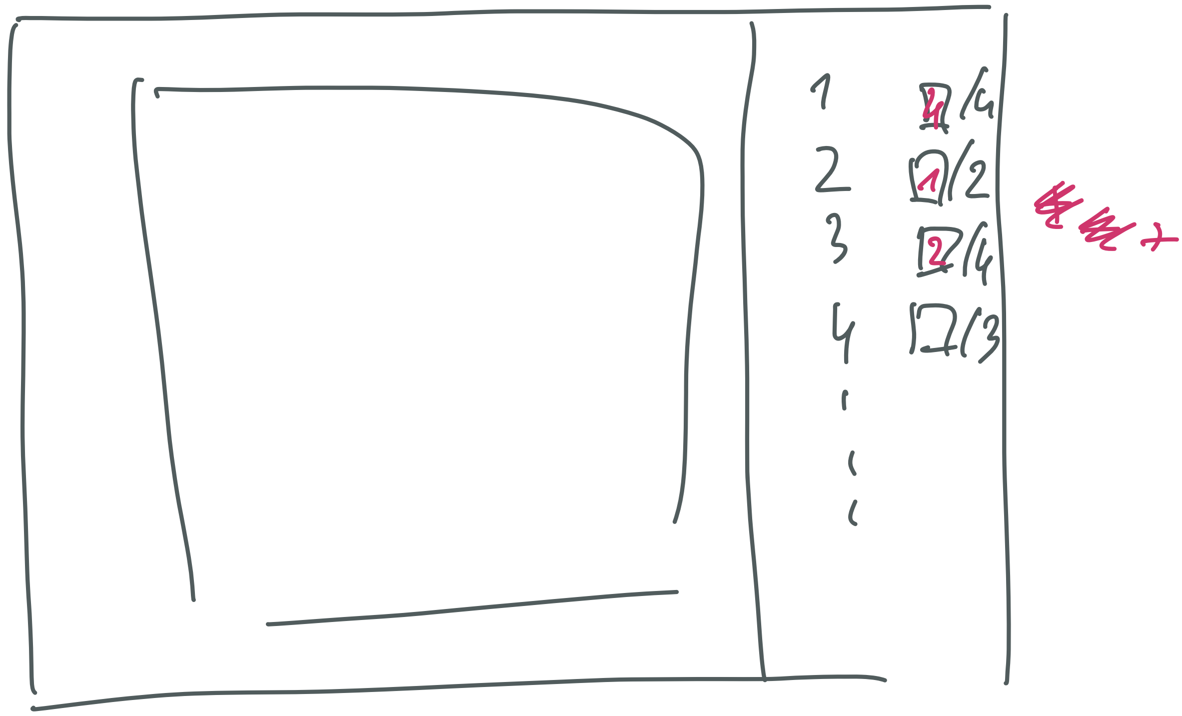
  * pas de Friction Blanc

  stylo plume

  * ordre des questions

  Ratures

  Mise en évidence des résultats, des pts clés.



1 4/4
2 1/2
3 2/4
4 /3

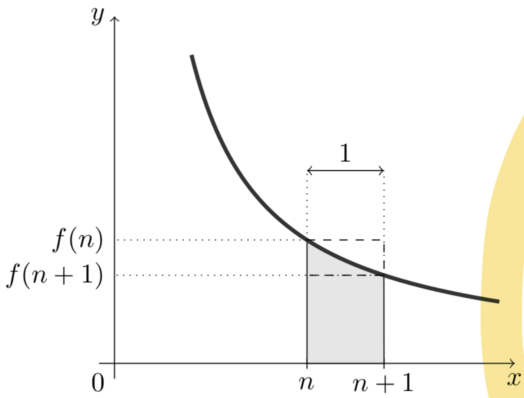
Pour jé : 52.5, 52.7, 52.8   CCINP

Preuves

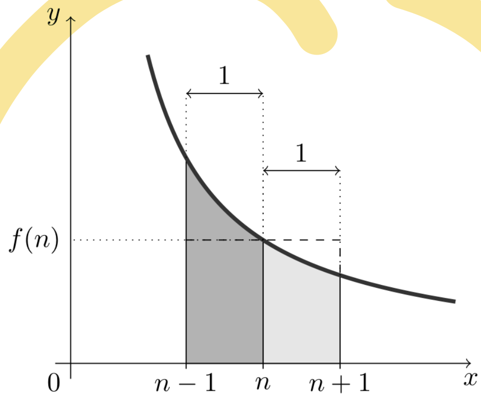
1 Technique de comparaison série-intégrale

Technique de comparaison. Soit f une fonction continue par morceaux, positive et décroissante.

- Encadrements élémentaires : par décroissance de f, on a :

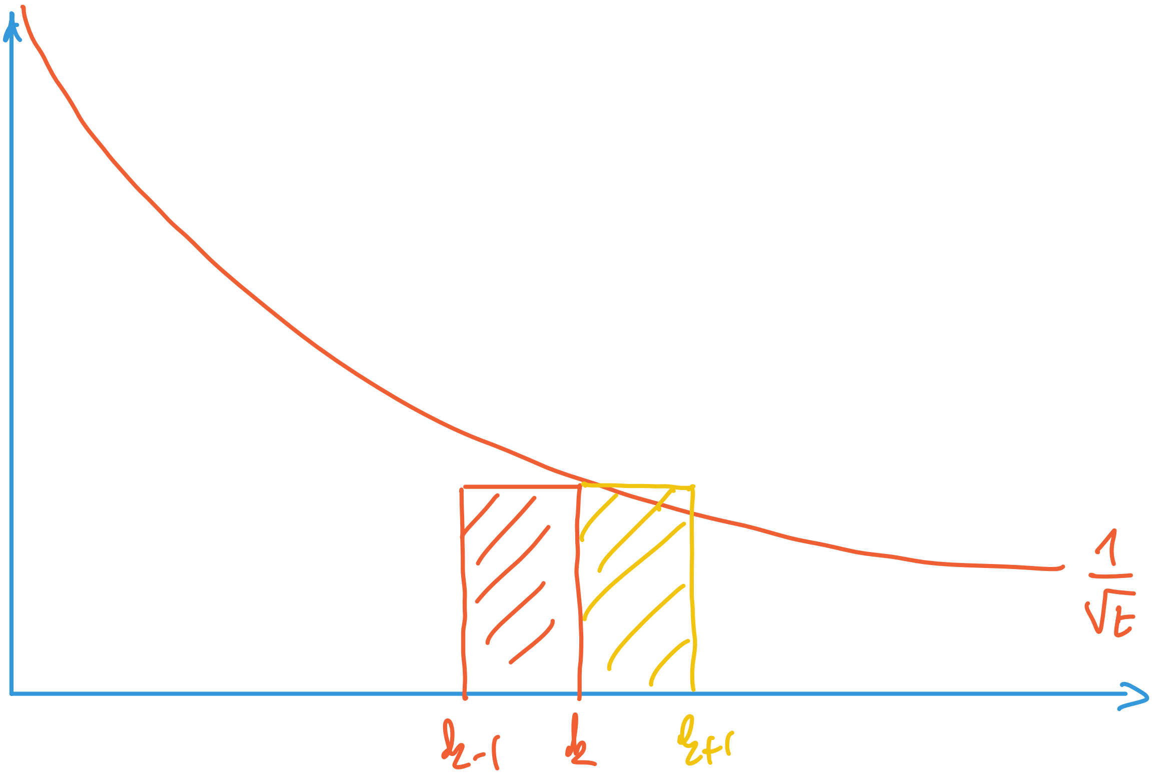


$$f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n)$$



$$\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple. Déterminer un équivalent simple de $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)_n$.



Par décroissance de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ sur $]0,+\infty[$,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$$

$\forall k$ $\forall k \geq 1$

donc

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \int_0^{n} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt \quad ?!$$

$$\| \qquad \left[2\sqrt{t}\right]_1^{n+1}$$

"Problème"

$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ n'est pas continue sur $[0,n]$

On a pour :

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = 2\sqrt{n+1} - 2 \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 1 + \int_1^{n} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$$

$$1 + \int_1^{n} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = 1 + 2\sqrt{n} - 2 \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$$

Donc par encadrement $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$

2 séries cv. $\sum u_n$ $\sum v_n$

produit des 2 sommes

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

$$(u_0 + u_1 + u_2 + \dots) \times (v_0 + v_1 + v_2 + \dots)$$

$$(u_0 v_0) + (u_1 v_0 + u_0 v_1) + (u_2 v_0 + u_1 v_1 + u_0 v_2) + \dots$$

3 Produit de Cauchy de deux séries

Définition. Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques. On appelle **produit de Cauchy** de ces deux séries la série $\sum w_n$ où :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

Remarque. *Dans cette définition, toutes les séries sont indexées à partir de 0. En pratique, on nomme les séries concernées, et on les complètent éventuellement avec des termes nulles pour coïncider avec la définition.*

Remarque. *On peut aussi noter* $w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q$.

Théorème.

On conserve les notations de la définition.
Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument, alors $\sum w_n$ converge absolument et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

preuve : → sommabilité

Exemple. Étudier la série de terme général $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 2^{n-k}}$.

On reconnait le tg du produit de Cauchy de $\sum u_n$ et $\sum v_n$ en posant $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$

$v_n = \frac{1}{2^n} \quad \forall n$

$k \qquad (n-k)$

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \, v_{n-k}$$

$\sum u_n$ cv abs (série de Riemann)

$\sum v_n$ cv abs (série géom de raison $\frac{1}{2}$)

Donc $\sum w_n$ converge

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\right)$$

$$= \frac{\pi^2}{6} \times 1 . \frac{1}{1-1/2} = \frac{\pi^2}{3}$$

Exemple. Pour $z \in \mathbb{C}$, on définit $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. Montrer que : $e^z \times e^{z'} = e^{z+z'}$

$\sum \frac{z^n}{n!}$ et $\sum \frac{z'^n}{n!}$ cv absolument donc :

$$e^z \times e^{z'} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z'^n}{n!}\right)$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} w_n\right)$$

où $w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{z'^{n-k}}{(n-k)!}$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k z'^{n-k}$$

$$= \frac{1}{n!} (z+z')^n \quad \text{par le binôme}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+z')^n}{n!}$$

$\exp(z) = e^z$

$$= e^{z+z'}$$

4 ~~Règle~~ de d'Alembert

Remarque. *Cette règle est mentionnée dans le programme, mais c'est un résultat peu utile pour l'étude des séries numériques, et il ne doit pas cacher le principe du résultat : on compare le terme général de la série à étudier à une série de référence – ici, une série géométrique.*

Astuce

~~Règle~~ de d'Alembert. Soit $\sum u_n$ une série numérique dont le terme général ne s'annule pas. On suppose que $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \bar{\mathbb{R}}$.

1. Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge absolument.
2. Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
3. Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Exemple : $u_n = \frac{1}{n}$ $\qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1$

$u_n = \frac{1}{n^2}$ $\qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \longrightarrow 1$

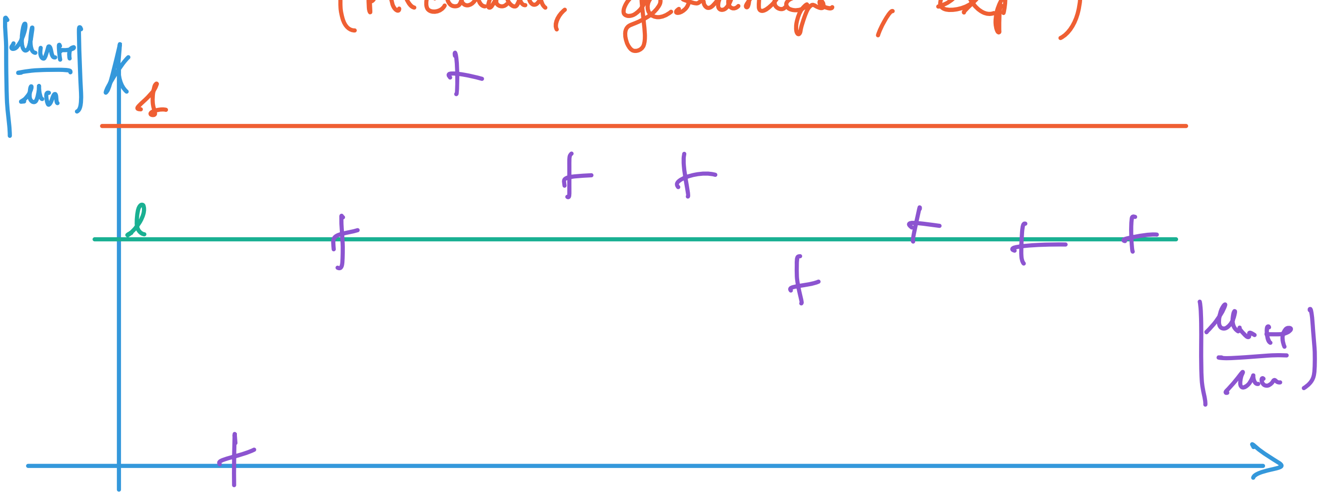
Preuve : Cas 1

Soit $(u_n)_n$ tq $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[+\infty]{} \ell < 1$

que dire de $\sum u_n$?

↳ on compare u_n au tg d'une série connue.

(Riemann, géométrique, exp)



Par déf de la limite avec $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2}$

$$\cancel{\ell - \varepsilon \leq} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq \ell + \varepsilon = \frac{\ell+1}{2}$$

$\exists n_0$ tq $\forall n \geq n_0$, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq \frac{1+\ell}{2} < 1$

par réc $\forall n \geq n_0$ $\quad |u_n| \leq |u_{n_0}| \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n-n_0}$

t.g série géom de raison $\frac{1+\ell}{2} < 1$

convergente.

2e cas si $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \longrightarrow \ell > 1$

(à faire)

$|u_n| \longrightarrow +\infty$

car $|u_n| \geq |u_{n_0}| \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n-n_0}$

Exemple. Peut-on appliquer la règle de d'Alembert aux séries suivantes ?

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n^2}{2^n}$$

Étude de $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$

M1 d'Alembert ? (ça devrait pas être la 1re idée)

1er cas : $z \neq 0$

$$\left| \frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}} \right| = \frac{|z|}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1$$

donc par d'Alembert, $\sum \frac{z^n}{n!}$ cv absolument.

2e cas : $z = 0$

Bon, ça va.

M2 Comparons :

$a^n \ll n!$

$$\left|\frac{z^n}{n!}\right| = \frac{|z|^n}{n!}$$

$$= \frac{1}{n(n-1)} \cdot \frac{|z|^n}{(n-2)!}$$

$$= \frac{1}{n(n-1)} \times o(1)$$

$$= o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{2^n}$$

M1 **Comparons :**

$$\frac{n^2}{2^n} = \frac{1}{(1{,}5)^n} \times \cdots$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n} \times \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n}{(2)^n} \cdot n^2$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{n^2}{\left(\frac{4}{3}\right)^n}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^n o(1)$$

$$= o\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$$ série géom cv

M2 **d'Alembert**

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow[+\infty]{} \frac{1}{2} < 1$$

donc $\sum u_n$ cv absolument.