Pour ma 52.1, 52.3, 52.10

TIPE : 13e

Séries numériques

Je me souviens

1. Qu'est-ce qu'une série numérique ?
2. Quelles sont les notations associées ?

C'est un truc qui a un terme général u_n

noté

Somme

$\sum_{n=0}^{N} u_n$

Somme partielle

(la suite des sommes partielles)

$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

la somme de la série (c'est un nombre)

$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ $\qquad$ $\sum u_n$

familles sommables

la série "le truc".

$\sum_{n\geq 0} u_n$

3. Que signifie « série grossièrement divergente » ?

4. « Étudier une série », ça veut dire quoi ?

Déf $\sum u_n$ diverge grossièrement lorsque $u_n \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$

Prop Si $\sum u_n$ cv alors $u_n \underset{+\infty}{\to} 0$

(4) Étudier une série $\sum u_n$, c'est savoir si elle cv.

5. Le cas de la série géométrique ?

6. Le cas des séries de Riemann ?

(5) La série géométrique : ex de référence

$$\sum \alpha q^n$$

elle cv si et ssi $|q| < 1$

Dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha q^n = \alpha \cdot \frac{1}{1-q}$$

et $$\sum_{n=2}^{+\infty} \alpha q^n = \cancel{\alpha \frac{1}{1-q} - \alpha q^0} - \alpha q^1$$

$$= \alpha q^2 \cdot \frac{1}{1-q}$$

Séries de Riemann : ex de référence.

$$\sum_{n>0} \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{cv} \quad \underline{\text{ssi}} \quad \alpha > 1$$

Définition

$\sum u_n$ cv $\underline{\text{si}}$ la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

$$\int_a^b f(t)\,dt = \left[F(t)\right]_a^b$$

7. C'est quoi, le « lien suite-série » ?

$$(u_n)_n \text{ converge} \iff \sum u_{n+1} - u_n \text{ converge}$$

Preuve :

$$u_{n+1} = u_0 + \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) \qquad \text{par télescopage}$$

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt$$

8. Comment étudier une série à termes réels positifs ?

- Étudier $\sum u_n$, c'est d'abord regarder le comportement asymptotique de u_n.

Au voisinage de $n \to +\infty$: et $v_n > 0$

* Si $u_n \sim v_n$ et $\sum v_n$ converge absolument alors $\sum u_n$ converge
* Si $u_n = o(v_n)$ ou $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ converge absolument alors $\sum u_n$ cv absolument.
* Si $0 \leq u_n \leq v_n$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge

- comp. série intégrale

- on étudie la suite des sommes partielles si le reste a échoué.
  (intéressant pour les séries télescopiques)

9. Comment étudier une série numériques, à termes réels ou complexes ?

- Si $\sum |u_n|$ cv (on dit que $\sum u_n$ cv absolument)
  alors $\sum u_n$ cv

- Théorème de séries alternées

  Si $(u_n)_n$ est positive, décroissante, de limite nulle
  Alors $\sum (-1)^n u_n$ converge.

Ex : $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ est >0, $\searrow$, de limite nulle
donc $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ converge.

De plus :

On note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$ la somme de la série

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n u_n$$

$$R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n u_n$$

$|R_N|$ désigne l'erreur commise en confondant S_N et S.

Résultat : si le th des séries alternées s'applique :

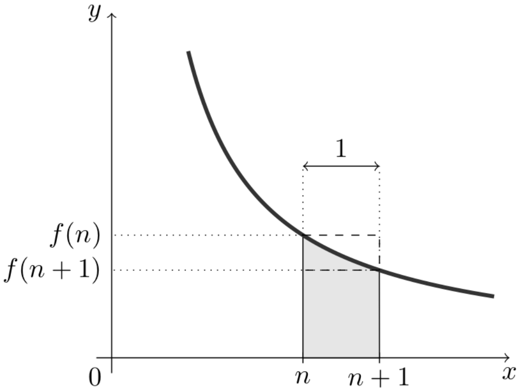
$$|R_N| \leq |\text{son } 1^{er} \text{ terme}| = |u_{N+1}|$$

et R_N est du signe de son 1^{er} terme.

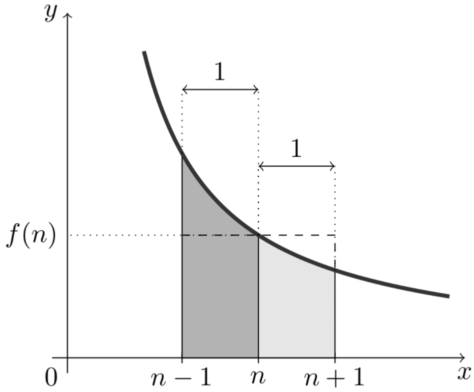
1 Technique de comparaison série-intégrale

Technique de comparaison. Soit f une fonction continue par morceaux, positive et décroissante.

- Encadrements élémentaires : par décroissance de f, on a :



$$f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n)$$



$$\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

- En sommant ces inégalités, on obtient :

$$\sum_{n=n_0+1}^{N} f(n) \leqslant \int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=n_0}^{N-1} f(n) \quad \text{et} \quad \int_{n_0}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=n_0}^{N} f(n) \leqslant \int_{n_0-1}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t$$

- Si la série $\sum f(n)$ converge, alors l'intégrale $\displaystyle\int^{\to+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

- Si l'intégrale $\displaystyle\int^{\to+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors la série $\sum f(n)$ converge.

- En cas de convergence, on a un encadrement des restes de $\sum f(n)$:

$$\int_{n_0+1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} f(n) \leqslant \int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

  qui permet souvent d'obtenir un équivalent.

- En cas de divergence, l'encadrement déjà vu des sommes partielles de $\sum f(n)$ permet souvent d'obtenir un équivalent.

- Ces inégalités s'adaptent au cas où f est croissante.

- On présentera toujours un schéma pour illustrer les inégalités annoncées.

Exemple. Déterminer un équivalent simple de $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)_n$.

2 Méthode d'éclatement

Théorème des séries alternées.

Si $(u_n)_n$ est positive, décroissante et de limite nulle,
alors la série alternée $\sum(-1)^n u_n$ converge.

Résultat complémentaire.

Si la série alternée $\sum(-1)^n u_n$ vérifie les hypothèses du théorème spécial des séries alternées, alors pour tout n, le reste R_n a le signe de $(-1)^{n+1}u_{n+1}$ et $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$.
D'autre part, la somme S est encadrée par deux sommes partielles successives.

Remarque. *Le théorème s'applique aussi à $\sum(-1)^{n+1}u_n$, ou alors si les hypothèses ne sont vérifiées qu'à partir d'un certain rang.*

Preuve: $\to$ cf MP2I

CCINP. 8

Remarque. *Attention ! On ne peut pas montrer la convergence d'une série équivalente à une série à laquelle on applique le théorème des séries alternées, car son terme général n'est pas de signe constant. Ces exemples relèvent plutôt de la méthode d'éclatement, présentée sur les exemples suivants :*

Exemple. Peut-on appliquer le théorème des séries alternées à la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}}$?

Et à celle de terme général $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$?

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}} = (-1)^n \cdot \underbrace{\frac{1}{n+(-1)^{n+1}}}_{v_n}$$

$$v_0 = \frac{1}{-1} \qquad v_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$v_2 = \frac{1}{2-1} = 1 \qquad v_3 = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$$

$$v_4 = \frac{1}{4-1} = \frac{1}{3}$$

On dirait que le th des séries alternées ne s'applique pas.

<u>Au voisinage de $n \to +\infty$</u>

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}}$$

$$\sim \frac{(-1)^n}{n}$$

<u>Zut!</u>

pas cv absolue de $\sum \frac{(-1)^n}{n}$

donc pas de cv par comparaison.

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

t.g série cv par le th des séries alternées

tg série abs convergente par comparaison

donc $\sum u_n$ converge.

"méthode d'éclatement".