Pour ve : S1.1, S1.2, S1.6

Suites numériques

Je me souviens

1.1 Récurrence

1. Raconter ce qu'est une récurrence.

2. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme T_n tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(nx) = T_n(\cos x)$.

1. méthode de raisonnement

$$\left.\begin{array}{l} P(0) \\ \forall n \; P(n) \Rightarrow P(n+1) \end{array}\right\} \Rightarrow P(n) \;\; \forall n \in \mathbb{N}$$

quelle relation de récurrence ?

récurrence forte

$$\left.\begin{array}{l} P(0) \\ P(0) \wedge P(1) \wedge \dots \wedge P(n) \Rightarrow P(n+1) \end{array}\right\} \Rightarrow P(n) \;\; \forall n$$

Si $P(n)$ dépend des $P(k)$ précédent
(rel. de réc forte)

Ex: $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$

Récurrence double :

$$\left.\begin{array}{l} P(0) \wedge P(1) \\ P(n) \wedge P(n+1) \Rightarrow P(n+2) \end{array}\right\} \text{ alors } P(n)\ \forall n$$

rel de récurrence double.

② • $\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x)$

$$= \mathrm{Ré}\left(e^{i(n+1)x} + e^{i(n-1)x}\right)$$
$$= \mathrm{Ré}\left(e^{inx} \cdot 2\cos x\right)$$
$$= 2\cos x \ \mathrm{Ré}\left(e^{inx}\right)$$
$$= 2\cos x \cos(nx)$$

$$\cos(n+1)x = 2\cos x \cos(nx) - \cos(n-1)x$$

rel de réc satisfaite par $(\cos(nx))_n$

• Par récurrence double

montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists T_n \in \mathbb{R}[X]$ tq

$$\cos(nx) = T_n(\cos x)$$

* Initialisation

Mque: $\exists T_0$ tq $\cos(0) = T_0(\cos x)$

$\exists T_1$ tq $\cos(x) = T_1(\cos x)$

$\exists T_2$ tq $\cos(2x) = T_2(\cos x)$

$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

$= 2\cos^2 x - 1$

$T_2(X) = 2X^2 - 1$ convient !

Posons $T_0 = 1$ et $T_1 = X$

on a $T_0(\cos x) = 1 = \cos(0x)$

$T_1(\cos x) = \cos x = \cos(1 \cdot x)$

* Hérédité

Soit $n \geqslant 1$ fixé

On suppose $\exists T_n, T_{n-1} \in \mathbb{R}[X]$

tq $\forall x$ $\cos(nx) = T_n(\cos x)$

$\cos((n-1)x) = T_{n-1}(\cos x)$

Alors : $\cos((n+1)x) = 2\cos x \cos(nx) - \cos((n-1)x)$

$= 2\cos x \, T_n(\cos x) - T_{n-1}(\cos x)$

par H.R.

Posons $T_{n+1}(X) = 2X\,T_n(X) - T_{n-1}(X)$

$\in \mathbb{R}[X]$

et on a bien $\cos((n+1)x) = T_{n+1}(\cos x)$

* CCl : par récurrence, il existe $T_n \in \mathbb{R}[X]$
tq $\cos(nx) = T_n(\cos x)$

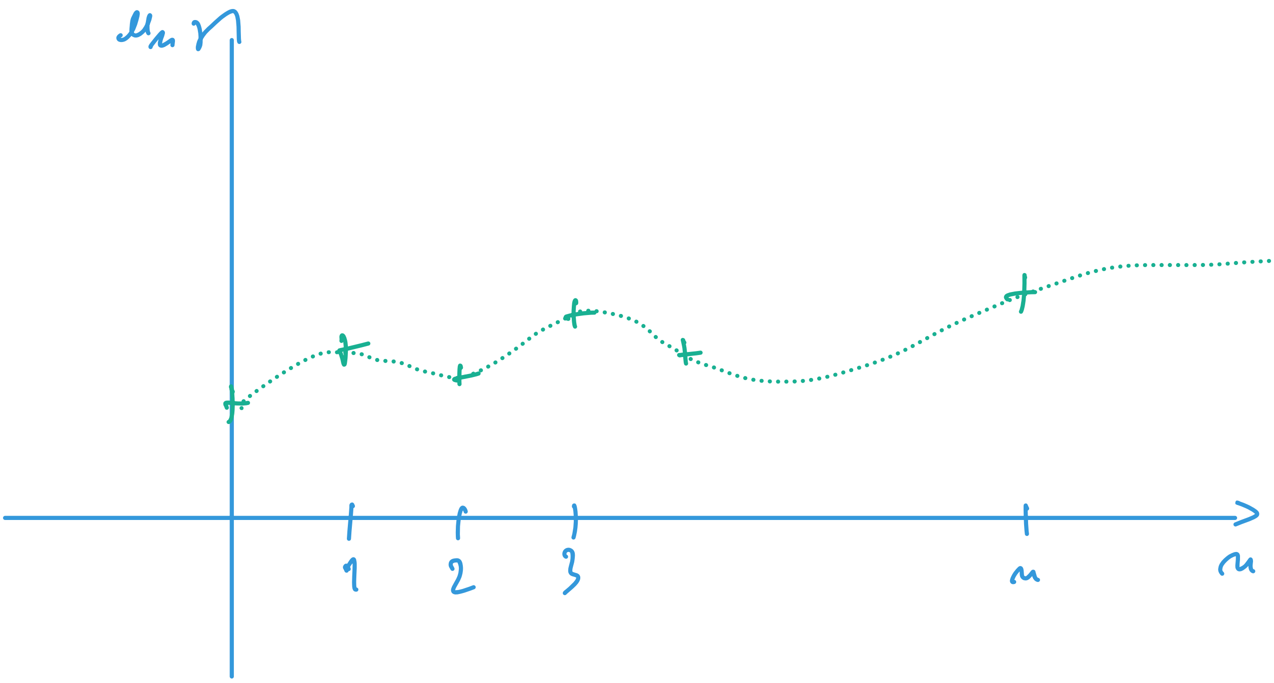
1.2 Suite numérique, convergence, divergence

3. C'est quoi, une suite numérique ?
4. On peut plutôt parler de famille ?

$u_n \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ $\forall n$

$$u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u(n) = u_n \end{array}$$



5. Proposer trois modes de définition pour une suite numérique.

- par récurrence (simple, double ...)

$$\begin{cases} u_0 \\ \forall n \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

- par une formule explicite

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \sin \frac{1}{n}$$

- par une déf. implicite

u_n est la sol de $x + \ln x = n$

6. Comment définir « $(u_n)_n$ converge » ? Comment ça se comprend ?
7. Et « $(u_n)_n$ ne converge pas » ?

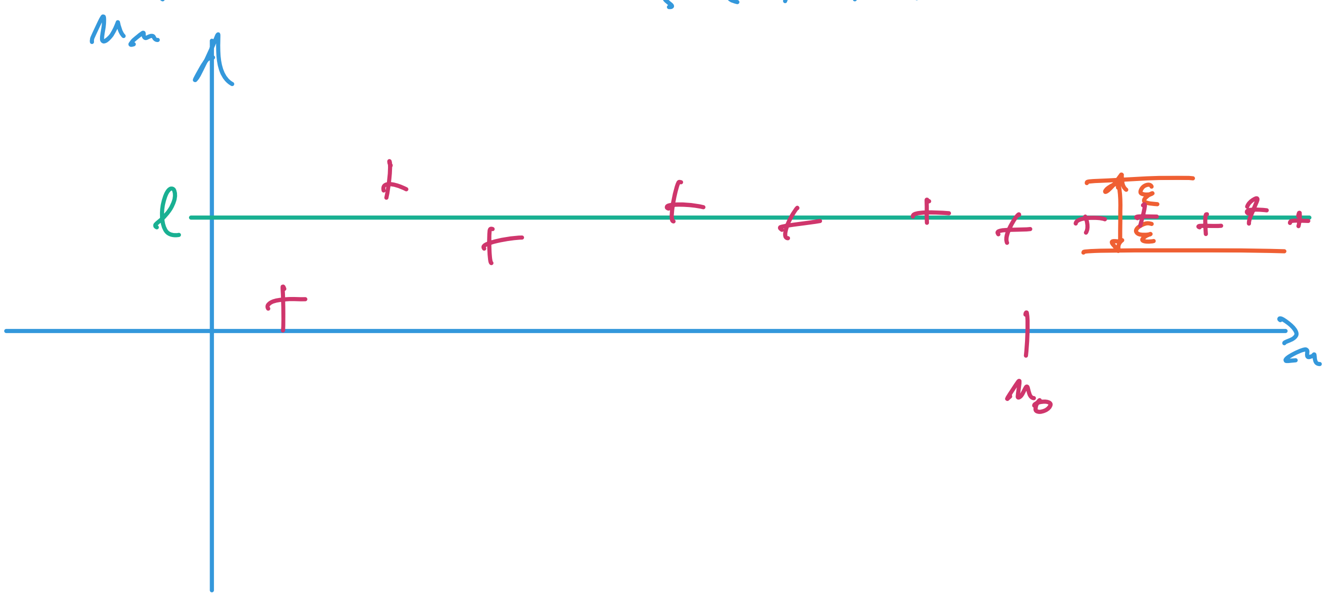
14. Que signifie « étudier une suite » ?

$(u_n)_n$ converge

$\iff \exists \ell\ \forall \varepsilon>0,\ \exists n_0$ tq $\forall n \geq n_0\ |u_n-\ell| \leq \varepsilon$

(u_n) converge vers ℓ

$\iff \forall \varepsilon>0\quad \exists n_0$ tq $(n \geq n_0) \Rightarrow |u_n-\ell| \leq \varepsilon$



$(u_n)_n$ ne converge pas

$\iff \forall \ell\quad \neg\left(\forall \varepsilon>0, \exists n_0 \quad \dots\right)$

$\iff \forall \ell\ \exists \varepsilon>0\ \forall n_0\quad \exists n \geq n_0$ tq $|u_n-\ell| > \varepsilon$

(14) Étudier $(u_n)_n$, c'est dire si elle cv ou pas (et éventuellement sa limite)

8. Y a-t-il un lien entre « converge » et « bornée » ?

9. Est-ce que $(u_n)_n$ converge, c'est la même chose que $(u_n)_n$ est stationnaire ?

10. Est-ce que $(u_n)_n$ converge, c'~~est la même~~ chose que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$?

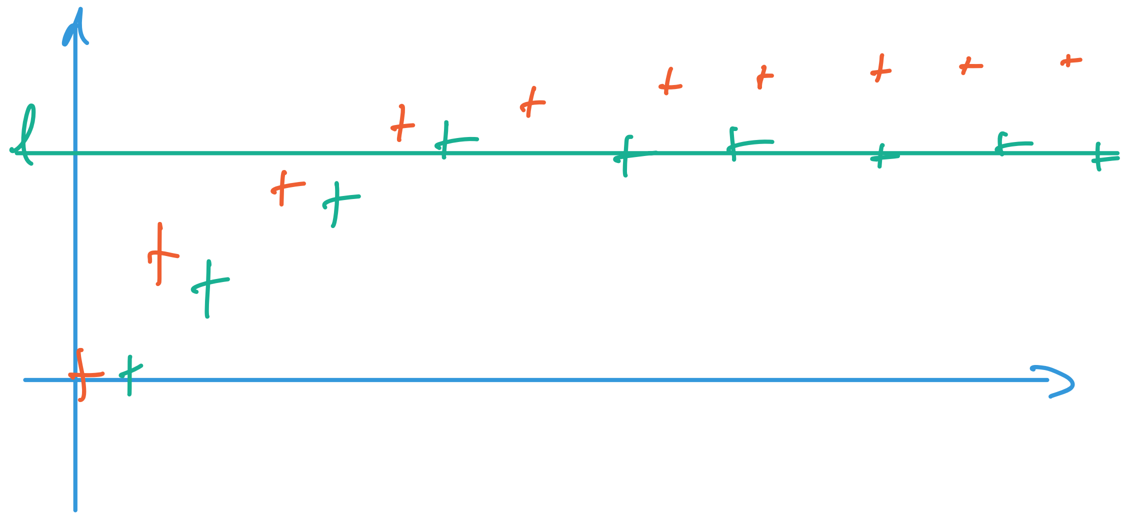
8 Si $(u_n)_n$ converge, alors $(u_n)_n$ est bornée

9 Non

$(u_n)_n$ stationnaire

signifie : $\exists n_0$ tq $\forall n \geq n_0$, $\left| \begin{array}{l} u_n = u_{n+1} \\ u_n = u_{n_0} \end{array} \right.$

10 Non



$u_n = \ln(n) \to +\infty$

$u_{n+1} - u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$

$= \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$\xrightarrow[+\infty]{} 0$

$u_n = \sqrt{n}$

$u_{n+1} - u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \to 0$

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$ fact. par terme prép.

$$= \sqrt{n}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/2} - 1 \right]$$

$$= \sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{n}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/2} - 1 \right]$$

$$= \sqrt{n}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)$$

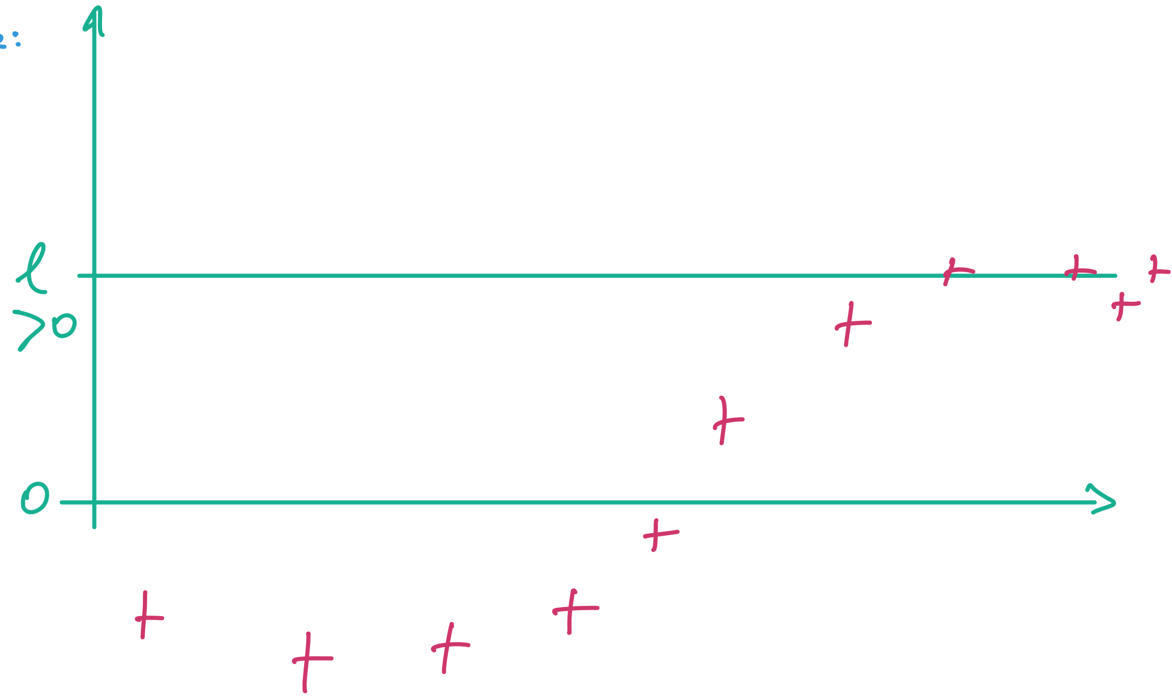
$$= O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

11. Que dire d'une suite $(u_n)_n$ qui converge vers $\ell > 0$?

alors $\exists N$ tq $\forall n \geq N$, $u_n > 0$

$u_n \geq 0$ "au voisinage de $+\infty$"

<u>preuve:</u>



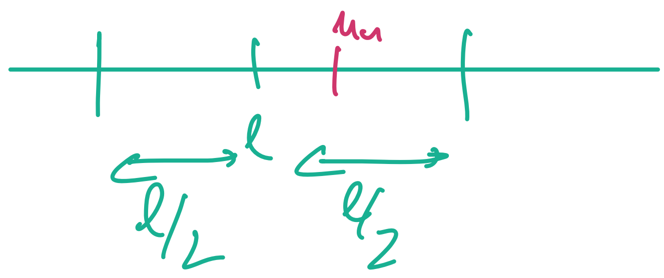
On suppose $(u_n)_n$ converge vers ℓ.

ie $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0$ tq $\forall n \geq n_0$ $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$

<u>Mque</u>: $\exists N$ tq $\forall n \geq N$ $u_n > 0$

On applique la déf de cv avec $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$

d'où l'existence de n_0 tq $\forall n \geq n_0$ $|u_n - \ell| \leq \frac{\ell}{2}$



donc $u_n \geq \frac{\ell}{2} > 0$

12. On sait qu'il y a des opérations sur les limites de suites convergentes, des formes indéterminées, etc.

13. Qu'est-ce que le résultat « limite par encadrement » ?

Si $v_n \leq u_n \leq w_n \quad \forall n$

et $v_n \to \ell$, $w_n \to \ell$ (même limite)

alors $u_n \to \ell$.

Utilisation : Si $|u_n - \ell| \leq v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

alors $u_n \xrightarrow[+\infty]{} \ell$

Exemple : $u_n = \int_0^1 \sin 3t \cdot t^n \, dt$

$\cancel{\lim \int = \int \lim}$

Mq que $u_n \to 0$.

$$|u_n - 0| = \left| \int_0^1 \sin 3t \; t^n \, dt \right|$$

$$\leq \int_0^1 |\sin^3 t|\, t^n \, dt$$

$$\leq \int_0^1 1 \cdot t^n \, dt$$

$$= \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

15. Citer le « théorème de convergence monotone ».

16. Donner la définition de « suites adjacentes », et le théorème des suites adjacentes.

15 Si $(u_n)_n$ est croissante majorée, elle converge

Si $(u_n)_n$ croissante non majorée, elle diverge de limite $+\infty$.

Et alors :

en notant M un majorant
ℓ la limite

$\forall n \quad u_n \leq M$

donc par passage à la limite, $\ell \leq M$

Rmq : $\ell = \sup \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$.

16 Def. Si $(u_n)_n \nearrow$ et $(v_n)_n \searrow$

et $(u_n - v_n) \longrightarrow 0$

on dit qu'elles sont adjacentes

Th : Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes

alors elles convergent, et ont la même limite.

1.3 Suites remarquables

17. On est d'accord pour ne pas rappeler les résultats concernant les suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants ?

suites arithmétiques : $u_n = u_0 + nr$

$$\begin{cases} u_0 \\ \forall n \quad u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$$

$$S = \sum_{k=0}^{n} u_k =$$

$$S = u_0 + (u_0 + r) + (u_0 + 2r) + \cdots + (u_0 + nr)$$

$$S = (u_0 + nr) + (u_0 + (n-1)r) + \cdots + u_0$$

$$2S = (2u_0 + nr) + (2u_0 + nr) + \cdots + (2u_0 + nr)$$

$$= (n+1)(2u_0 + nr)$$

$$S = (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)r}{2}$$

Suites géométriques $u_n = u_0 q^n$

ou : $\begin{cases} u_0 \\ \forall n \quad u_{n+1} = q u_n \end{cases}$

$$\sum_{k=2}^{n} 3 \cdot 2^k = 1^{er} \text{ terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nb de termes}}}{1 - \text{raison}} \quad (\text{raison} \neq 1)$$

$$= 3 \cdot 4 \cdot \frac{1 - 2^{n-1}}{1 - 2}$$

suites arithmético - géométrique

[...]

suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coeff. constants

u_0, u_1

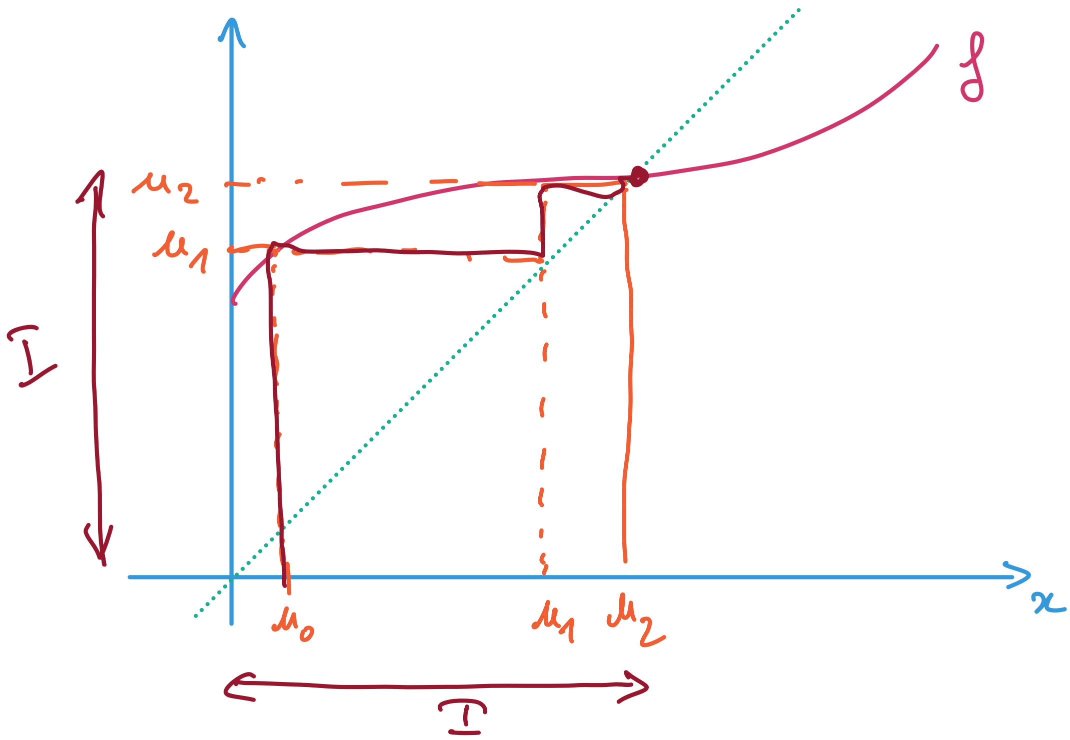
$\forall n \quad a u_{n+2} + b u_{n+1} + c u_n = 0$

[...]

1.4 Suites récurrentes

Parlons maintenant des suites récurrentes. On considère $(u_n)_n$ définie par la donnée de u_0 et de la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

18. Qu'est-ce qu'un intervalle stable par f ? Quel est l'intérêt de les déterminer ?
19. Qu'est-ce qu'un point fixe pour f ? Quel est l'intérêt dans le cadres des suites récurrentes ?
20. En quoi l'étude du signe de $f(x) - x$ informe sur le comportement de la suite $(u_n)_n$?



I est stable par f lorsque $f(I) \subset I$

ie $\forall x \in I,\ f(x) \in I$

Si I stable par f,

$u_0 \in I$

alors par réc $u_n \in I$ $\forall n$

(permet de justifier l'existence de $(u_n)_n$)

α point fixe de $f \iff f(\alpha) = \alpha$

On suppose $(u_n)_n$ convergente (notons ℓ sa limite)

$\forall n \quad u_{n+1} = f(u_n)$

donc, à la limite : (f continue)

$$\ell = f(\ell)$$

donc ℓ point fixe de f.

20

x	
$f'(x)$	
f	
$f(x)-x$	

signe de $f(x)-x$ donne la monotonie de $(u_n)_n$

21. Qu'est-ce qu'une fonction lispschitzienne ? contractante ?

22. Si f est contractante et admet un point fixe a, qu'en déduire pour $(u_n)_n$?

f lipschitzienne : $\exists C>0$ tq $\forall x, y \in I$

$$|f(y)-f(x)| \leq C\,|y-x|$$

$$\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| \leq C$$

I.A.F : Si $|f'(x)| \leq C \quad \forall x$

alors f lipschitzienne.

22 $\longrightarrow$ $\boxed{5.1.2}$

23. Lorsque f est décroissante, que dire des suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$?

1.5 Relation d’ordre

24. Qu’est-ce qui permet d’assurer l’existence d’une borne supérieure ?

25. Ça veut dire quoi, Sup $A \leqslant 3$?