Cet après-midi, 15h40 : INFO MPI + MPI*

Pour jé 62.1, 62.2, 62.3

Pour les 7h30 à rédiger au choix

$\boxed{61.22}$ ✍

$\boxed{61.23}$ ✍

$\boxed{62.13}$ ✍

$\boxed{62.14}$ ✍

Analyse asymptotique

Je me souviens

1. C'est quoi, l'analyse asymptotique ?
2. Ça veut dire quoi, négligeable ?
3. C'est quoi, un $o(1)$?

① étude au voisinage de = localement

comportement

remplacer $f(x)$ par un autre truc plus simple

et | qui lui ressemble
| qui a les m̃ prop.

② au voisinage de $x \to a$, $f(x) \ll g(x)$

ssi $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 0$

si $f(x) = g(x) \times \big(\underbrace{\varepsilon(x)}_{\xrightarrow[x\to a]{} 0} \big)$

$\uparrow$
mise en facteur.

$f(x) = o(g(x))$ signifie :

en factorisant par $g(x)$,

le quotient tend vers 0.

équivalent : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tq $\forall x \in]a-\eta, a+\eta[$
$|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$

$f(x) = o(1)$

$f(x) = 1 \times \big(\underbrace{f(x)}_{\xrightarrow[x\to a]{} 0} \big)$

$$\boxed{o(1) = \text{tend vers } 0}$$

Rmq : $f(x) = o(g(x))$
$= g(x) \times \underbrace{o(1)}_{\xrightarrow[x\to a]{} 0}$

4. Ça veut dire quoi, dominé ?

5. C'est quoi, un $O(1)$?

$f(x)$ est dominée par $g(x)$ au vois de $x \to a$

ssi $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ est bornée au vois de $x \to a$

ie :

$$\exists M > 0,\ \exists \eta \text{ tq } \forall x \in [a-\eta, a+\eta]\ \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq M$$

$$|f(x)| \leq M\, |g(x)|$$

au vois de $x \to a$:

$$f(x) = O(g(x))$$

ssi $f(x) = g(x) \underbrace{\left(\qquad \right)}_{\text{bornée du vois de a.}}$

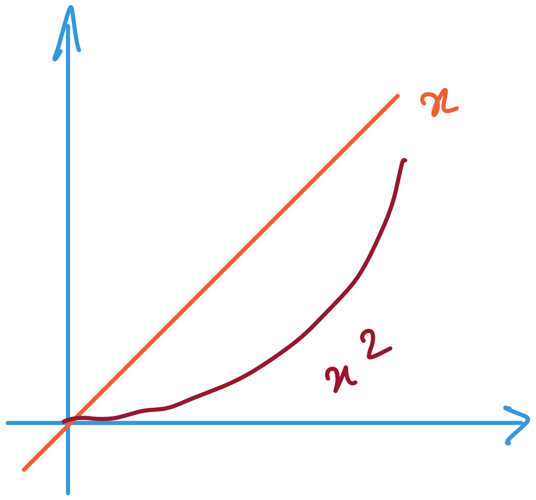
$$\boxed{O(1) = \text{bornée au vois de a}}$$

$$f(x) = O(g(x))$$
$$= g(x)\, O(1)$$

6. On peut faire des opérations sur les petit o ? sur les grand O ?

au vois de $x \to 0$:

$$o(x) + o(x^2) = o(x)$$



$$= x\,o(1) + x^2 o(1)$$

$$= x\big(\underbrace{o(1) + x\,o(1)}_{o(1)}\big)$$

$$= x\,o(1) + x^2 o(1)$$

$$= x^2\left(\underbrace{\frac{o(1)}{x}}_{?} + o(1)\right)$$

au vois de 0

$$o(x^2) \times o(x^3) = o(x^5)$$

$$= x^2 o(1)\, x^3 o(1)$$

$$= x^5 \underbrace{o(1)\, o(1)}_{o(1)}$$

$$x^2 \times o(x^3) = o(x^5)$$

au voi de 0 :

$$o(x^2) + O(x^2) = \cancel{o}\, O(x^2)$$

$$= x^2 o(1) + x^2 O(1) = x^2\big(o(1) + O(1)\big)$$

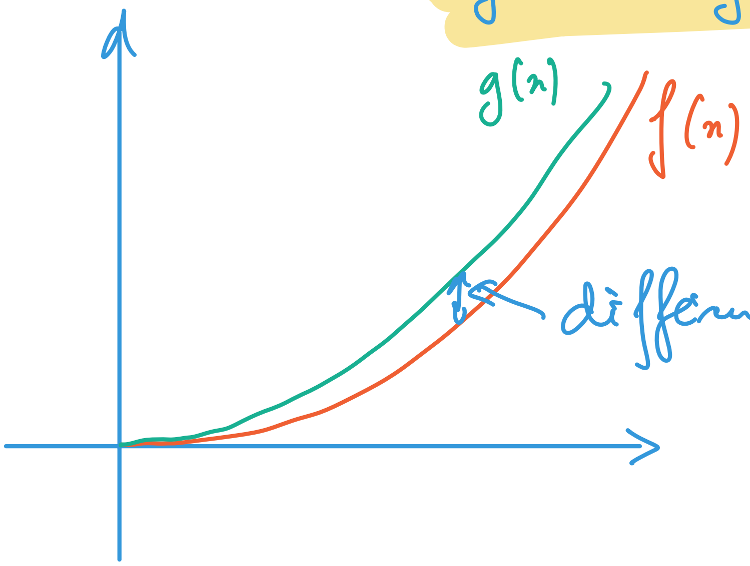
7. Ça veut dire quoi, équivalent ?

8. Est-ce que c'est une relation d'équivalence ?

9. On peut faire des opérations sur les équivalents ?

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \iff \cancel{\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1}$$

$$\iff f(x) = g(x) + o(g(x))$$



différence $= o(g(x))$

⑧ RST

$f(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$ oui

si $f(x) \sim g(x)$ alors $g(x) \sim f(x)$

si $\left.\begin{array}{l} f(x) \sim g(x) \\ g(x) \sim h(x) \end{array}\right\}$ alors $f(x) \sim h(x)$

(par les rapports)

(9) mult d'équivalents OK

division OK

élévation à une puissance OK

si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$

alors $f(x)^n \underset{x\to a}{\sim} g(x)^n \quad n \in \mathbb{N}$

$f(x)^\alpha \underset{x\to a}{\sim} g(x)^\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R}$ fixe

$\sqrt{f(x)} \underset{x\to a}{\sim} \sqrt{g(x)}$

pas d'addition si !

si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ ie $f(x) = g(x) + o(g(x))$

$h(x) \underset{x\to a}{\sim} i(x)$ $\quad h(x) = i(x) + o(i(x))$

$f(x) + h(x) = g(x) + i(x)$

$+ o(g(x)) + o(i(x))$

10. Y a-t-il des équivalents usuels ?

11. À quoi servent les équivalents ?

<u>Au voisinage de $x \to 0$:</u>

$e^x = 1 + o(1)$

$e^x \sim 1$

$e^x \sim 1 + x$

$e^x \sim 1 + 3x$

$e^x - 1 \sim x$

$\ln(1+x) \sim x$

$\cos x \sim 1$

$\cos x - 1 \sim -\dfrac{x^2}{2}$

$\vdots$

à ne pas connaître

Dans une recherche de limite, on remplace l'expr par une expr. équivalente : elles ont la même limite.

On <u>rédige</u> :

Au voisinage de $x \to a$: $f(x) = \dots$

$= \dots$

$\sim \dots$

$\xrightarrow[x \to a]{} \ell.$

12. Qu'est ce qui se cache derrière l'argument souvent avancé de « croissances comparées » ?

" Classement des expressions au voisinage de $+\infty$ "

$a>0$

$$\ln(\ln x) \ll \ln(x) \ll x^a \ll e^x \ll e^{e^x}$$

$$\ln(x) \underset{+\infty}{\ll} \sqrt{x}$$

$$\ln(x) \ll x^{0,0001}$$

$$x^a \ll x^b \quad \text{pour } a<b$$

Au voisinage de 0 :

$$x^a \ll x^b \quad \text{pour } b<a$$

$$x \ln x \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

$$x \ln x = \frac{-\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \quad \text{avec } \frac{1}{x} \to +\infty$$

$$\xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

13. C'est quoi, un développement limité en 0 ?

14. Est-ce qu'un DL donne un équivalent ? un équivalent donne un DL ?

Au voisinage de 0 :

$$f(x) = \underbrace{P(x)}_{\in \mathbb{R}_n[X]} + o(x^n) \qquad DL_n(0)$$

$$= a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$\cos(x) \sim 1$$

$$\cos(x) - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$$

Un équivalent est donné en gardant le 1er terme.

$$\cos(x) \sim 1$$

donc $\cos(x) = 1 + o(1)$ $DL_0(0)$

15. Quels sont les DL que l'on doit connaître ?

au voisinage de 0

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p})$$

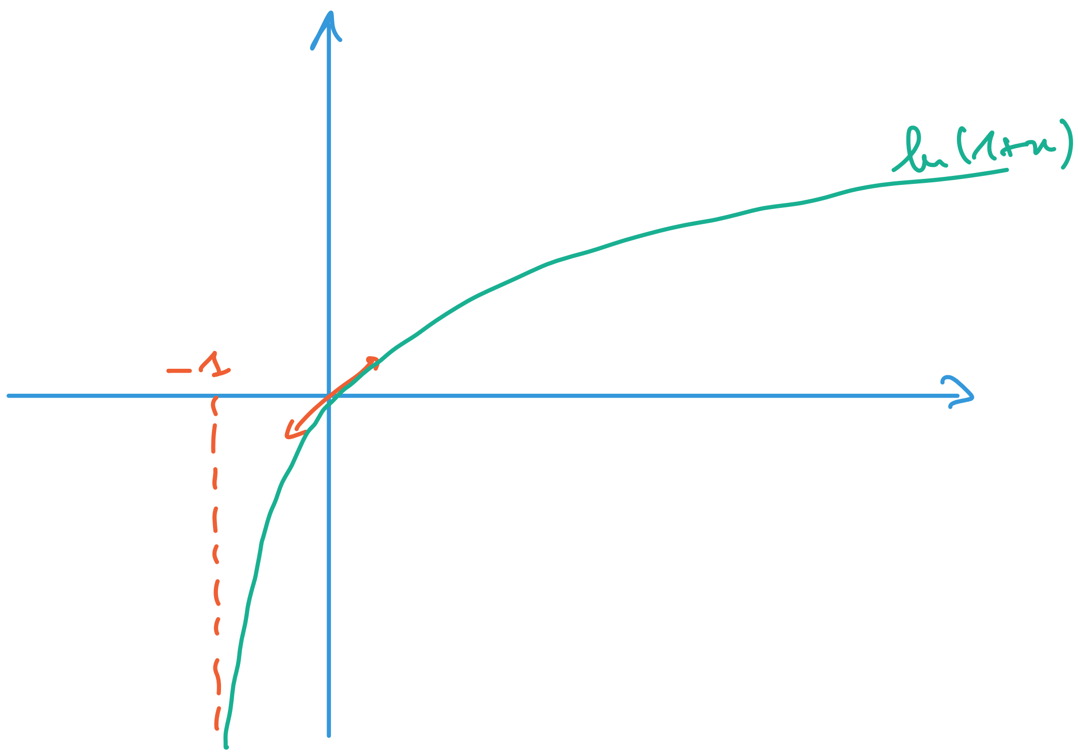
$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)} + o(x^{2p})$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p})$$

$$\operatorname{sh} x = \cdots$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \cdots + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$



$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = \cdots$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 + (-x^2) + (-x^2)^2 + \cdots + (-x^2)^n + o(x^{2n})$$

$$= 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$$

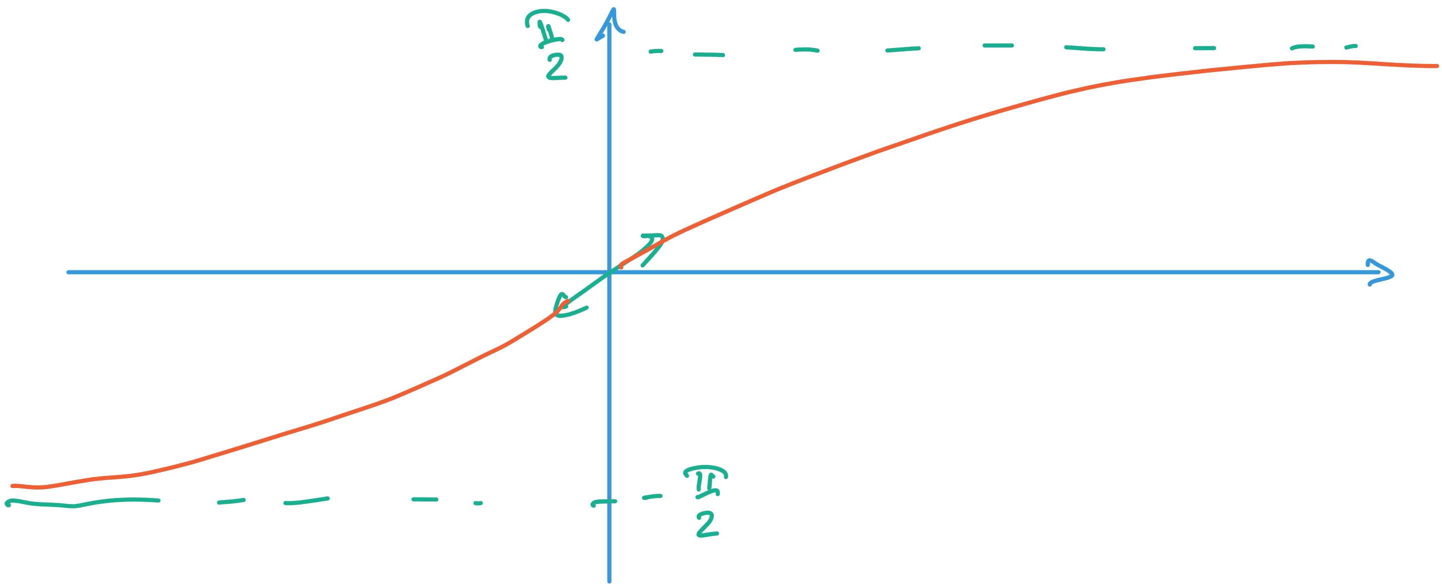
$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \cdots$$

$$+ \underbrace{\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}}_{n \text{ terms}} x^n + o(x^n)$$

$$\frac{\overbrace{a\,(a-1)\,(a-2)\cdots(a-n+1)}^{n \text{ terms}}}{\underbrace{1 \quad 2 \quad 3 \quad \cdots \quad n}_{n! \quad n \text{ terms}}} \qquad x^{\cancel{0}\,\cancel{1}\,\cancel{2}\,\cancel{3}\,n}$$

$$\sqrt{1+x}$$

$$\operatorname{Arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + o(x^{2n+1})$$



$$\mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

CL $\times$ quotient ?! composition primitive dérivation ?!	Tout sauf.

$$\left(1+x+x^2+o(x^2)\right)\left(x+\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right)$$
$$= x + x^2 + \frac{3}{2}x^3 + o(x^3)$$

$$\frac{1+x+x^2+o(x^2)}{x+\frac{x^3}{2}+o(x^3)}$$

qqch $\times \frac{1}{1-u}$

$$= \frac{\left(1+x+x^2+o(x^2)\right)}{x} \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}$$

$$= \frac{1+x+x^2+o(x^2)}{x} \times \left[1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) + o(x^2) \right]$$

1

$+u$

$+o(u)$

$$= \frac{1}{x}\left(1 + x + x^2 + o(x^2)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)$$

$$= \frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$$

pas un DL(0)

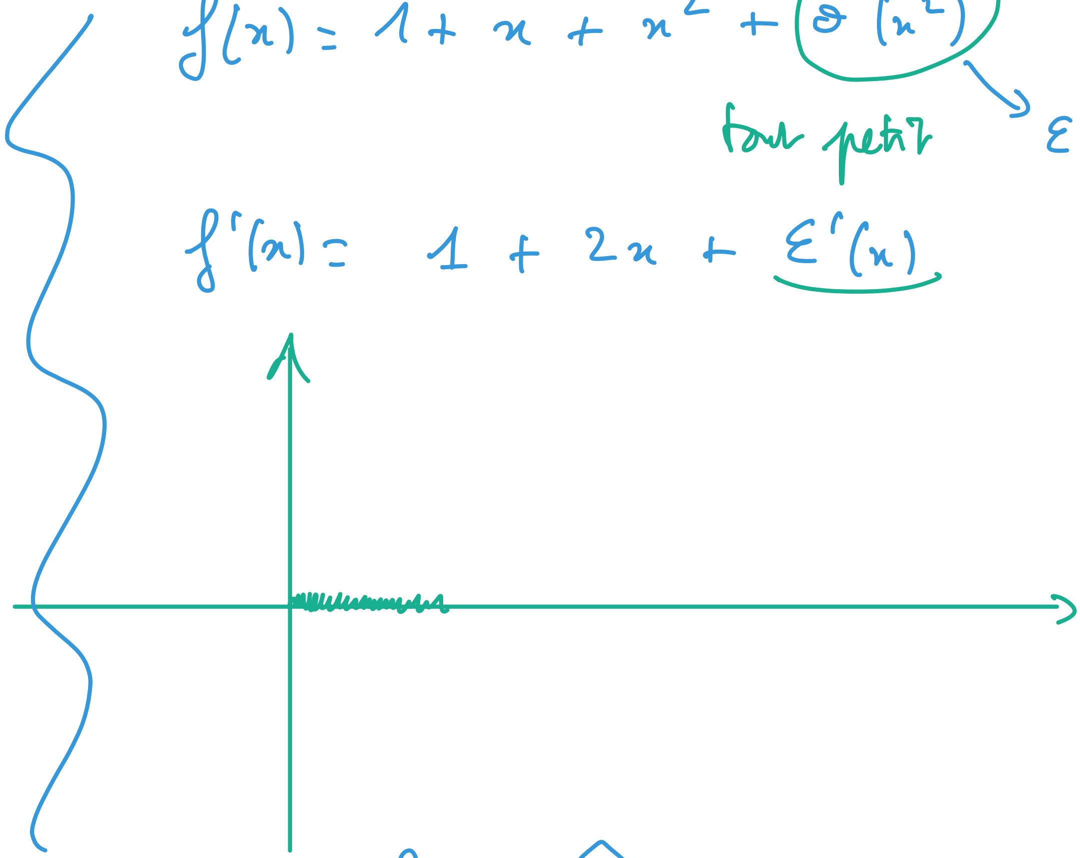
Primitive → oui

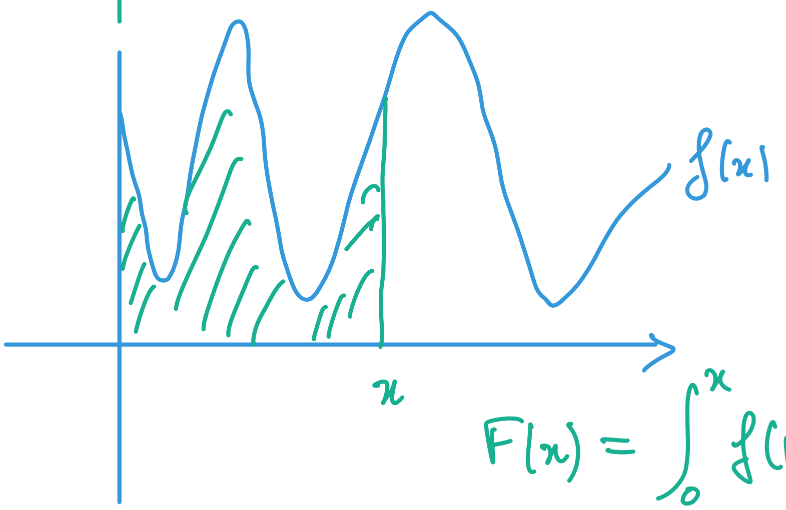
Dérivation → <u>NON</u>

$$f(x) = 1 + x + x^2 + o(x^2)$$

tout petit $\quad \varepsilon(x)$

$$f'(x) = 1 + 2x + \underline{\varepsilon'(x)}$$





$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

17. C'est quoi, un développement limité en a ?

c'est DL(0) de $f(a+h)$

dire $x \longrightarrow a$

c'est dire $x = a+h$ où $h \to 0$

On écrira : $f(a+h) = c_0 + c_1 h + c_2 h^2 + \dots + c_n h^n + o(h^n)$

Toujours donner le DL en $h \to 0$ et pas en x.

18. C'est quoi, un développement asymptotique ?

?

19. Au voisinage de $n \to +\infty$, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \sim ?$

20. Donner un exemple de suites telles que $u_n \sim v_n$ mais $e^{u_n} \not\sim e^{v_n}$.

21. Est-ce qu'on a toujours $u_{n+1} \sim n$?

<u>Au vois de $n \to +\infty$:</u>

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

$\ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} \dots$

$$= e^{n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}$$

$$= e^{1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{1}$$

donc $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e + o(1)$

donc $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \underset{+\infty}{\sim} e$

20 $\quad n \sim n+1$ et pourtant $\quad e^n \not\sim e^{n+1} = e\, e^n$

21 $\quad u_n = n!$ $\qquad u_{n+1} = (n+1)\, u_n \not\sim u_n$

Stirling:

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$$