Lu 7^h30 : DS G024.

$y = f(x)$
éq explicite

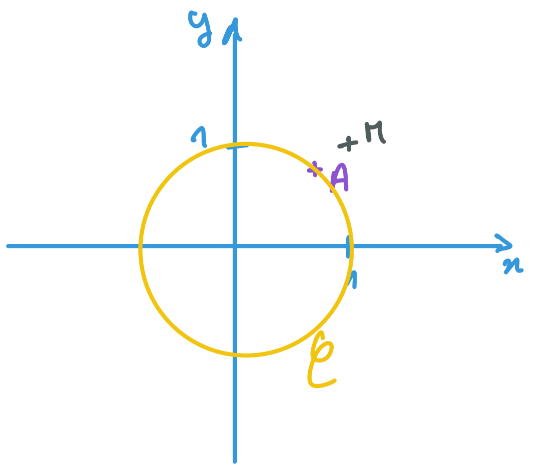
5 Applications géométriques

5.1 Courbes du plan définies par une équation cartésienne implicite

Le plan usuel est identifié à $\mathbb{R}^2$ et muni d'un repère orthonormal direct.

Définition. Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. L'ensemble Γ des points $M(x,y)$ tels que $f(x,y) = 0$ s'appelle la **courbe** d'équation cartésienne (implicite) $f(x,y) = 0$.

Exemple. Le cercle de centre O et de rayon 1 a pour équation cartésienne (implicite) $x^2 + y^2 = 1$.



$f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

$M(1,1)$ $\quad M \in \mathcal{C}$? $\qquad \mathcal{C} : f(x,y) = 0$

$f(M) = 1 \neq 0 \longrightarrow M \notin \mathcal{C}$

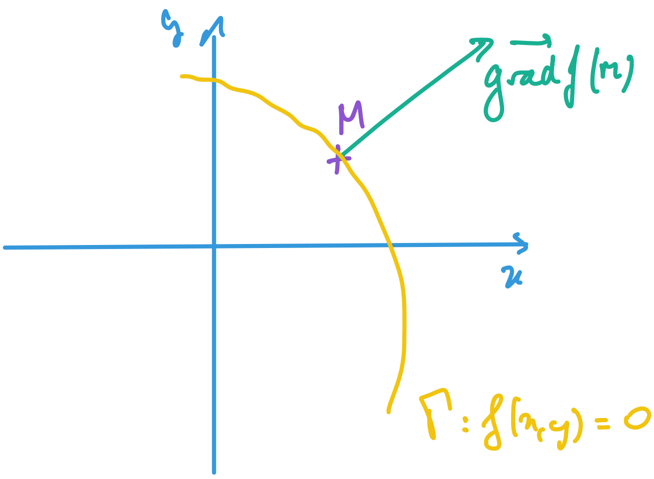
$A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\quad A \in \mathcal{C}$?

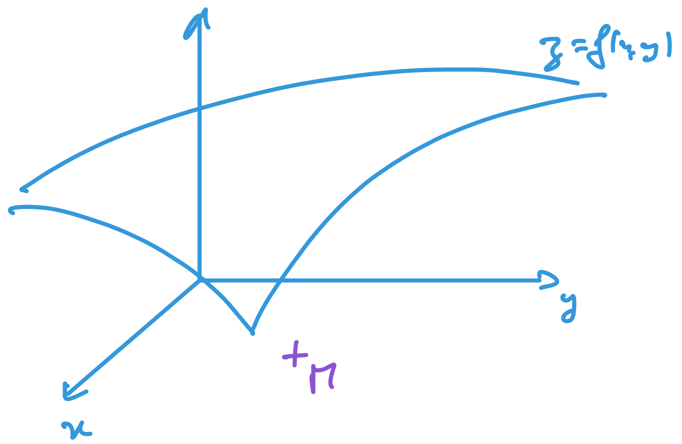
$f(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0 \quad A \in \mathcal{C}.$

Définition. En conservant les notations de la définition précédente :

$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(M), \frac{\partial f}{\partial y}(M)\right) \neq (0,0)$

- Un point $M(x,y) \in \Gamma$ est dit **régulier** si et seulement si $\nabla f(x,y) \neq 0$.
- La courbe Γ est dite **régulière** si et seulement si tous ses points sont réguliers.





Théorème.

Soit Γ une courbe d'équation cartésienne $f(x,y) = 0$, où f est de classe $\mathcal{C}^1$. Au voisinage de tous ses points réguliers, la courbe peut localement être paramétrée par :

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

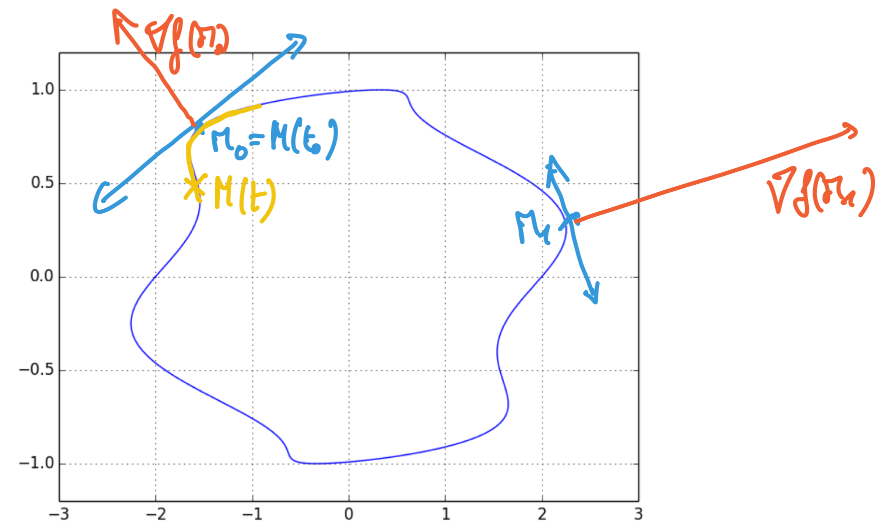
Preuve. Admis. □

Remarque. *Plus formellement, si $M_0(x_0, y_0)$ est un point régulier de Γ, on peut trouver un voisinage U de M_0 et deux fonctions x, y de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]t_0 - \alpha, t_0 + \beta[$ $(\alpha, \beta > 0)$ telles que :*

$$x(t_0) = x_0 \text{ et } y(t_0) = y_0$$

$$\forall M(x,y) \in \Gamma \cap U,\ \exists t \in]t_0 - \alpha, t_0 + \beta[\text{ t.q. } \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Proposition. Soit Γ une courbe d'équation cartésienne $f(x,y) = 0$, où f est de classe $\mathcal{C}^1$, et $M_0(x_0, y_0)$ un point régulier de Γ.
Alors Γ admet une tangente en M_0, dont $\nabla f(M_0)$ est un vecteur normal.



Preuve: Localement, au voisinage de M_0, Γ est paramétrée par

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \forall t \in]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$$

avec $M_0 = (x(t_0), y(t_0)) = M(t_0)$

$\forall t \in]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$, $M(t) \in \Gamma$ donc $f(x(t), y(t)) = 0$

On dérive : $x'(t) \dfrac{\partial f}{\partial x}(M(t)) + y'(t) \dfrac{\partial f}{\partial y}(M(t)) = 0$

ie $\left\langle \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}, \nabla f(M(t)) \right\rangle = 0$

donc le vecteur unitaire, qui dirige la tangente, est orthogonal au gradient.

Remarque. *On a donc l'équation de cette tangente par le raisonnement suivant :*

$$\begin{aligned} N(x,y)\in T &\iff \overrightarrow{M_0N}\perp \nabla f(M_0)\\ &\iff \left\langle \begin{pmatrix} x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\end{pmatrix}\right\rangle = 0\\ &\iff \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)=0 \end{aligned}$$

Exemple. Former l'équation de la tangente à l'hyperbole d'équation $x^2-\frac{y^2}{2}=1$ au point de coordonnées $(\sqrt{3},2)$.

Notons Γ la courbe et $f(x,y)=0$ son équation, avec

$$f(x,y) = x^2 - \frac{y^2}{2} - 1$$

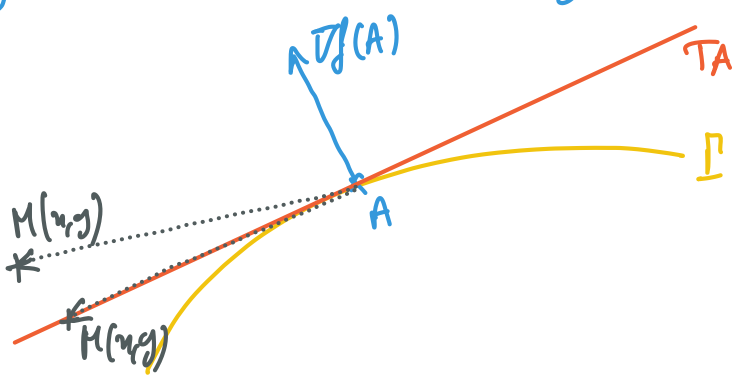
- On note $A=(\sqrt{3},2)$

  $f(A) = 3 - \frac{4}{2} - 1 = 0$ donc $A\in\Gamma$.

- $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(M) = 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(M) = -y \end{cases}$ $\qquad (a,b) \quad \begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}$

  donc $\nabla f(A) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3}\\ -2\end{pmatrix}$

- La tangente T_A à Γ en A est orthogonale à $\nabla f(A)$.



$M(x,y)\in T_A \iff$ propriété géométrique

$\iff$ traduction analytique (en coord)

$\iff \overrightarrow{AM}\perp \nabla f(A)$

$$\iff \langle \overrightarrow{AM} \mid \overrightarrow{\nabla f(A)} \rangle = 0$$

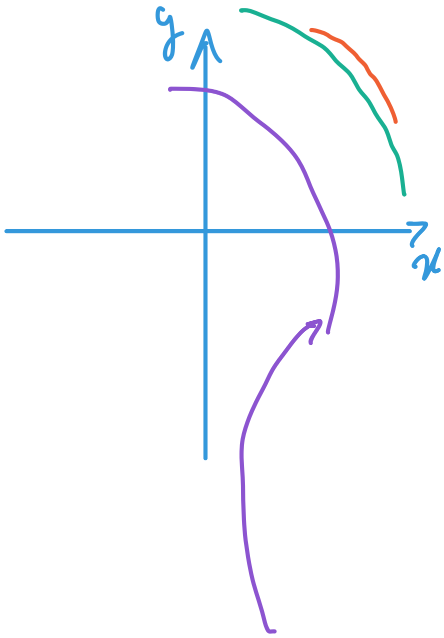
$$\iff \left\langle \begin{pmatrix} x - \sqrt{3} \\ y - 2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

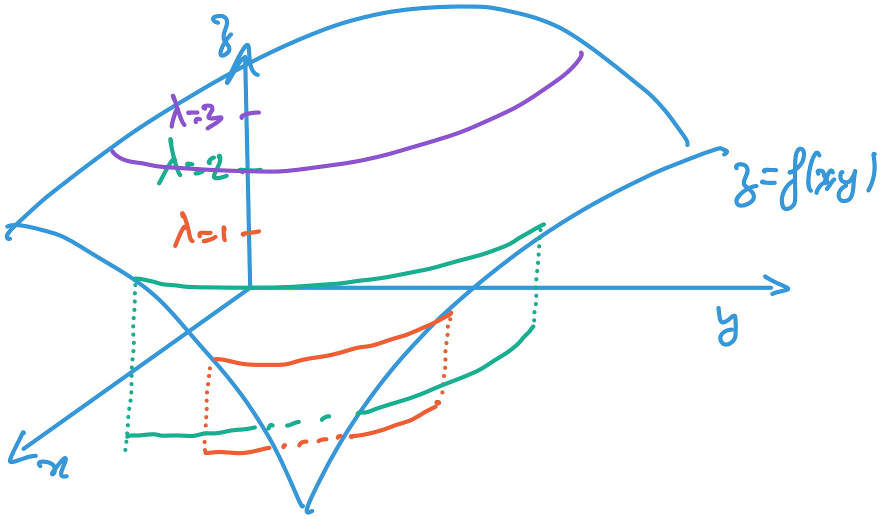
$$\iff \sqrt{3}\,x - y - 1 = 0$$

Définition. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On appelle **ligne de niveaux de** f les courbes d'équations cartésiennes (implicites) :

$$f(x,y) = \lambda$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

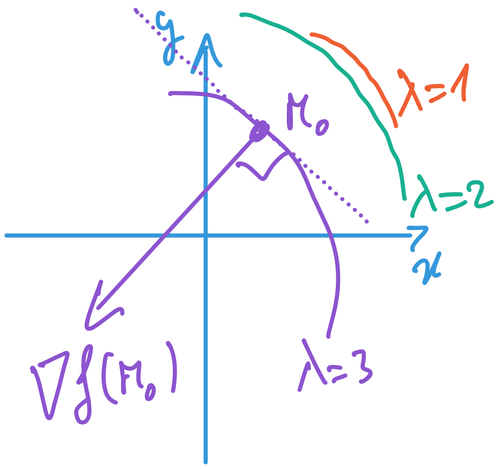




Courbe d'éq implicite $f(x,y)=\lambda=3$

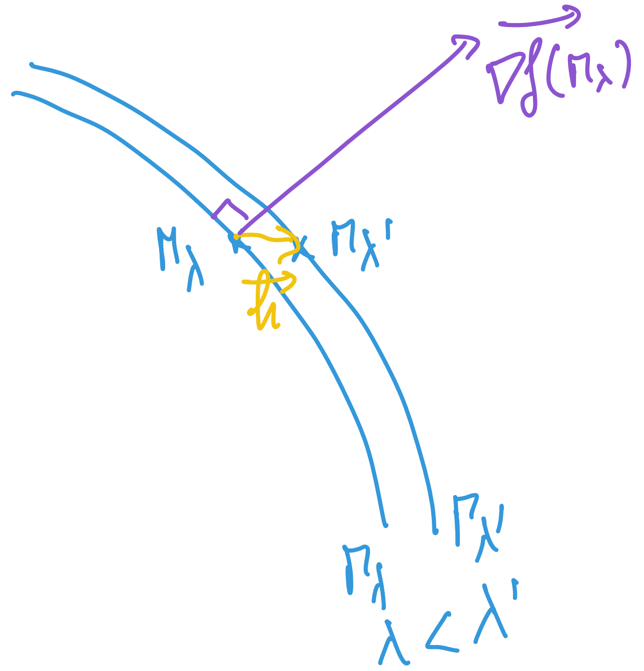
C'est la courbe de niveau $\lambda=3$ de f.

Proposition. En un point régulier $M_0(x_0, y_0)$ de la ligne de niveau Γ_λ de f, $\nabla f(x_0, y_0)$ est orthogonal à Γ_λ et orienté dans le sens des valeurs croissantes de f.



Explication : choisissons Γ_λ et $\Gamma_{\lambda'}$ proches

avec $\lambda < \lambda'$ (proches)



On note $\vec{h} = \overrightarrow{M_\lambda M_{\lambda}'}$ petit

DL_1 de f :

$$\underset{\underset{f(M_{\lambda}')}{\parallel}}{f(M_\lambda + \vec h)} = f(M_\lambda) + \langle \vec\nabla f(M_\lambda) \mid \vec h \rangle + o(h)$$

Ainsi $$\underbrace{\lambda' - \lambda}_{>0} = \underbrace{\langle \vec\nabla f(M_\lambda), \vec h \rangle + o(h)}_{\text{du signe de } \langle \vec\nabla f(M_\lambda), \vec h \rangle}$$

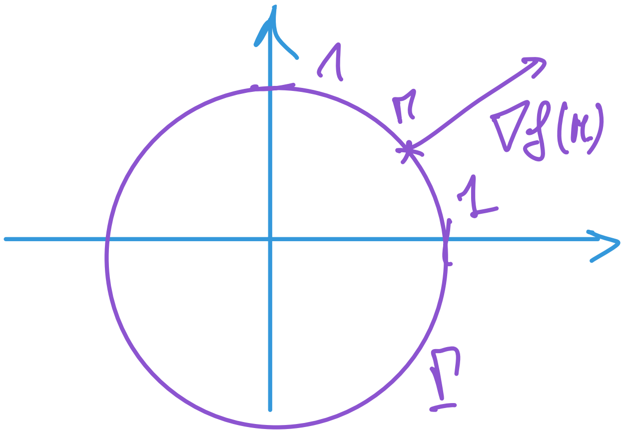
donc $\vec\nabla f(M_\lambda)$ pointe du même côté que $\vec h$,

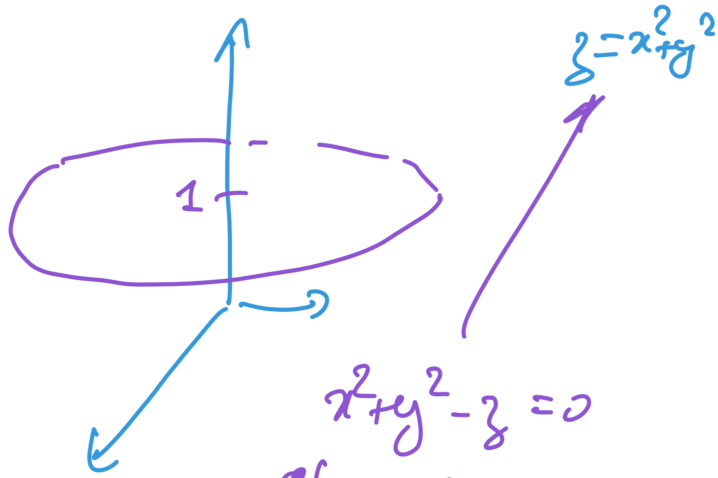
i.e. du côté de $\Gamma_{\lambda'}$

Soit $f : (x,y) \longmapsto x^2+y^2$

Courbes de niveau λ :

$\Gamma_\lambda : x^2+y^2=\lambda$

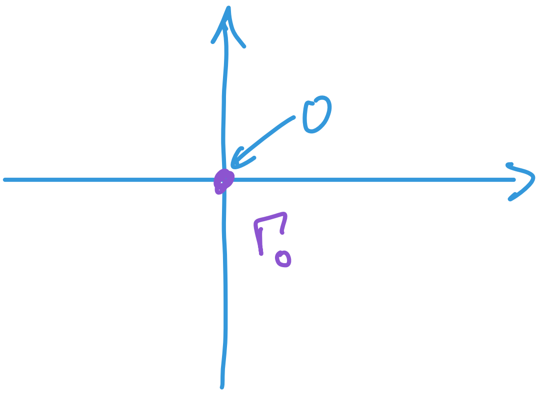




$x^2+y^2-z=0$

$g(x,y,z)=0$

$\Gamma_0 : x^2+y^2=0$



$$\nabla f(M) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc point singulier.

5.2 Surfaces de l'espace définies par une équation cartésienne implicite

L'espace usuel est identifié à $\mathbb{R}^3$ et muni d'un repère orthonormal direct.

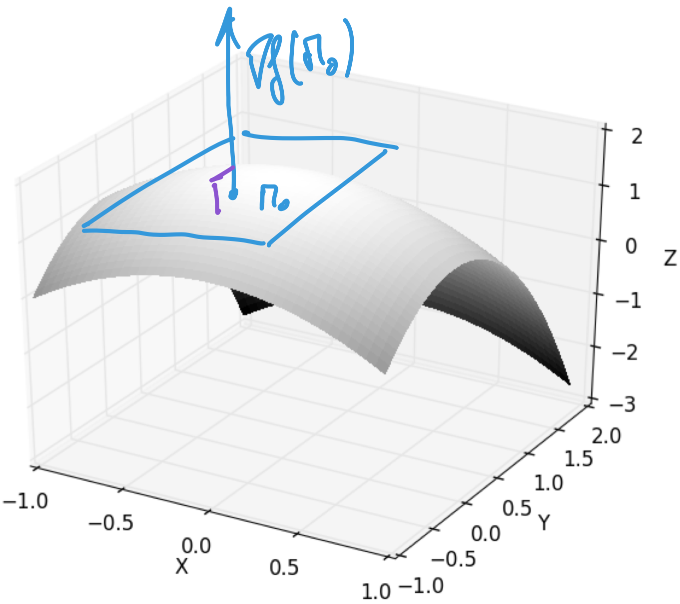
Définition. Soit $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & f(x,y,z) \end{array}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. L'ensemble Σ des points $M(x,y,z)$ tels que $f(x,y,z)=0$ s'appelle la **surface** d'équation cartésienne (implicite) $f(x,y,z)=0$.

Exemple. La sphère de centre O et de rayon 1 a pour équation cartésienne (implicite) $x^2+y^2+z^2=1$.

Définition. En conservant les notations de la définition précédente :

- Un point $M(x,y,z) \in \Sigma$ est dit **régulier** si et seulement si $\nabla f(x,y,z) \neq 0$.
- La surface Σ est dite **régulière** si et seulement si tous ses points sont réguliers.

Définition. Soit Σ une surface d'équation $f(x,y,z)$ et $M_0(x_0,y_0,z_0)$ un point régulier. On appelle **plan tangent à Σ en M_0** le plan passant par M_0, et orthogonal à $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$.



Remarque. *On a donc l'équation du plan tangent par le raisonnement suivant :*

$$\begin{aligned} N(x,y,z) \in T &\iff \overrightarrow{M_0N} \perp \nabla f(M_0) \\ &\iff \left\langle \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(M_0) \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \\ &\iff \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0 \end{aligned}$$

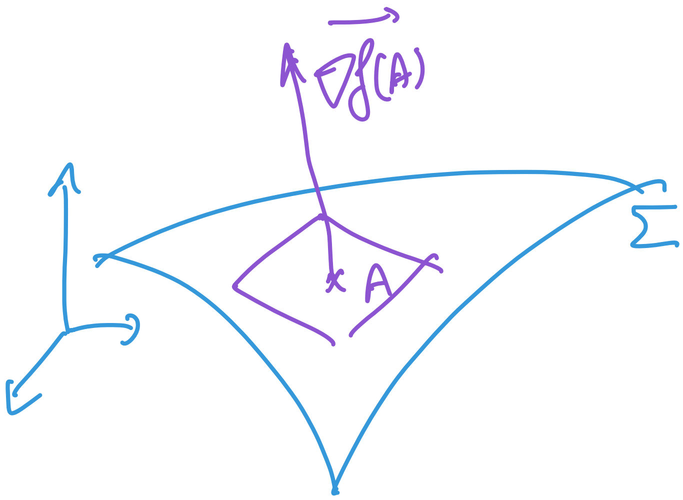
Exemple. Déterminer une équation du plan tangent à l'ellipsoïde d'équation $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ au point de coordonnées $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, 0\right)$.

$\Sigma : x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - 1 = 0$ $\qquad f(x,y,z) = x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - 1$

- $A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, 0\right)$

On calcule $f(A) = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + 0 - 1 = 0$

donc $A \in \Sigma$.



- $\nabla f(M) = \begin{pmatrix} 2x \\ \frac{1}{2}y \\ \frac{2}{9}z \end{pmatrix}$

$\nabla f(A) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

Le plan tangent T_A à Σ en A est orthogonal à $\nabla f(A)$

Ainsi : $M(x,y,z) \in T_A \iff \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{\nabla f(A)}$

$\iff \langle \overrightarrow{AM} \mid \overrightarrow{\nabla f(A)} \rangle = 0$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\sqrt{2}) + (y-\sqrt{2})\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + (z-0)\cdot 0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\,x + \frac{1}{\sqrt{2}}\,y - 2 = 0$$

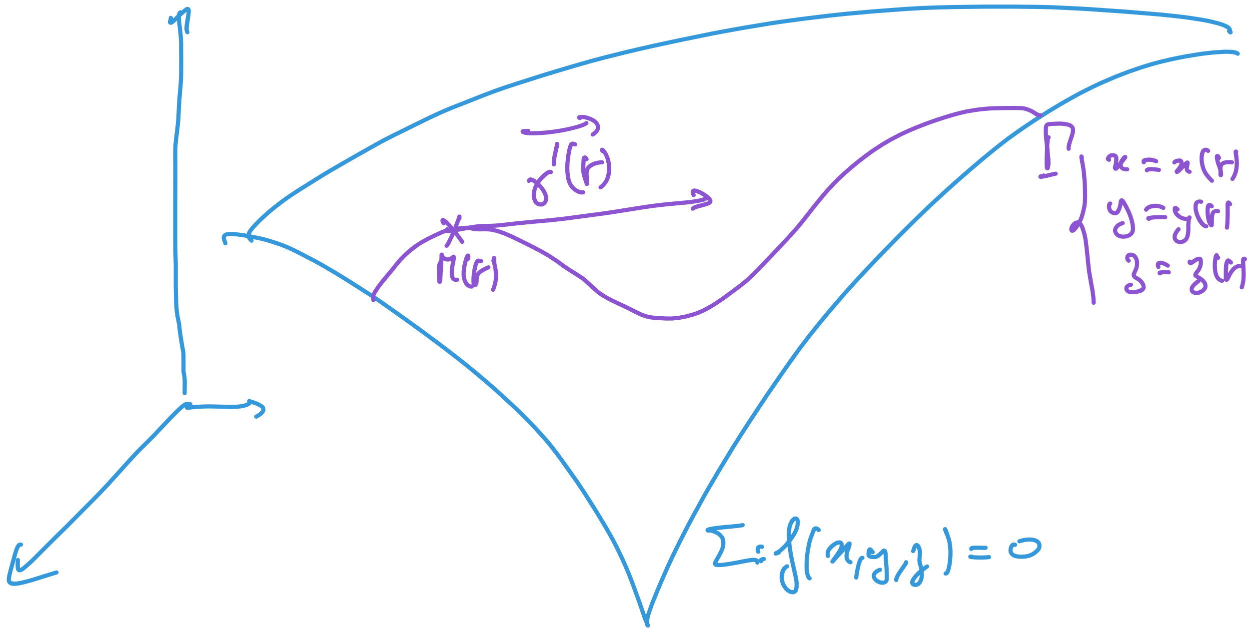
Définition. Soit Σ une surface d'équation cartésienne $f(x,y,z)=0$. On appelle **courbe tracée sur la surface** Σ toute courbe paramétrée $\gamma\,:\,t\in I\mapsto(x(t),y(t),z(t))$ telle que :

$$\forall t\in I,\ f(\gamma(t))=0$$

Remarque. *Bien-sûr, si f est définie sur U ouvert de $\mathbb{R}^3$ et γ définie sur I, on suppose que $\gamma(I)\subset U$.*

Remarque. *Une courbe tracée sur Σ est d'abord une courbe paramétrée par* $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t)\end{cases}$.

En un point régulier, sa tangente est dirigée par le vecteur vitesse $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t)\end{pmatrix}$.

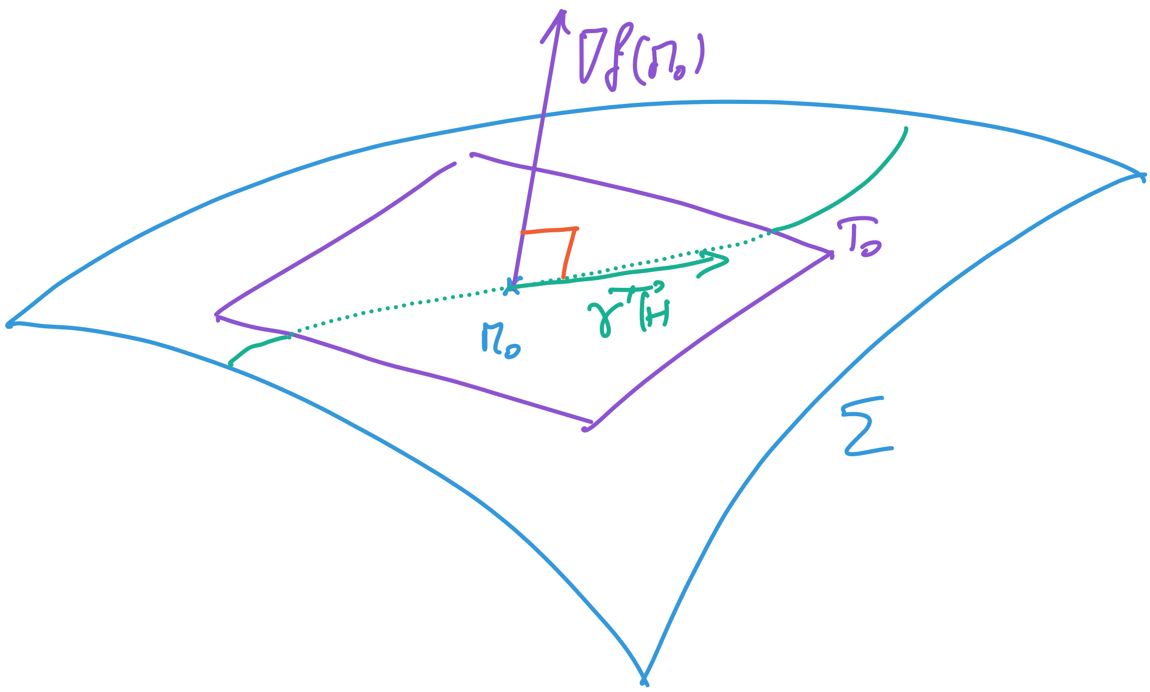


Γ paramétrée par $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t)\end{cases}$ est incluse dans Σ

ssi $\forall t \quad f(x(t), y(t), z(t)) = 0$

Proposition. La tangente en M_0 à une courbe tracée sur Σ est une droite incluse dans le plan tangent à Σ passant par M_0.

Remarque. *On peut aussi définir un courbe comme intersection de deux surfaces. Dans ce cas, il s'agit d'une courbe tracée sur chacune des deux surfaces, que l'on peut en général supposer localement paramétrable.*



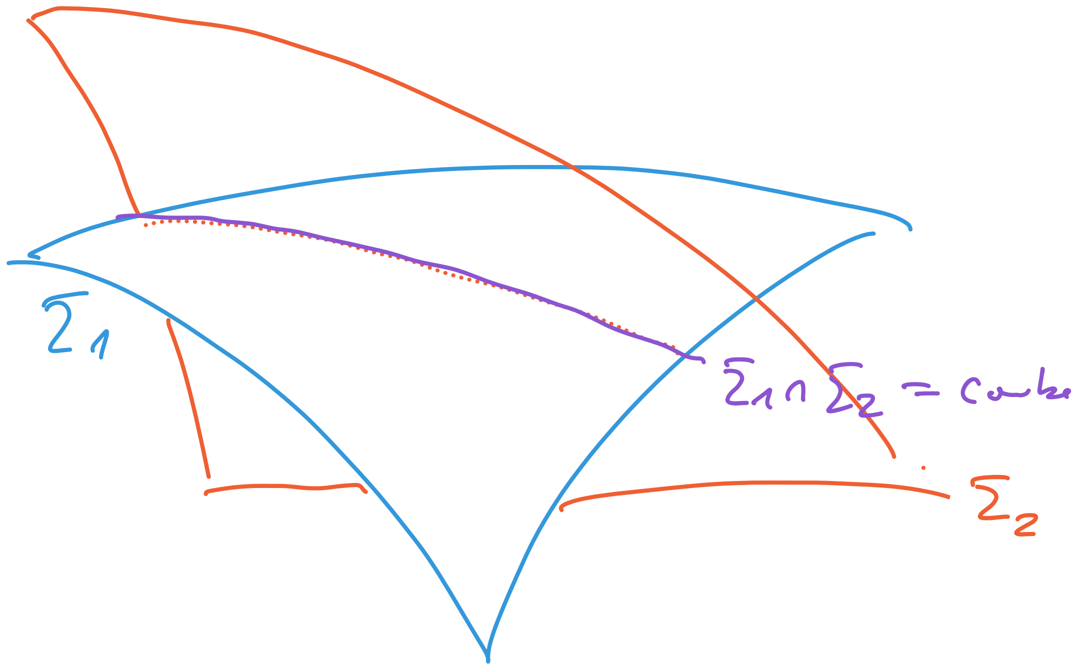
Preuve : $\forall t \quad f(x(t), y(t), z(t)) = 0$

On dérive.

$$\forall t \quad x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(M(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(M(t)) + z'(t)\frac{\partial f}{\partial z}(M(t)) = 0$$

$$\shortparallel$$

$$\langle \overrightarrow{\gamma'(t)}, \overrightarrow{\nabla f(M(t))} \rangle$$


Σ_1
$\Sigma_1 \cap \Sigma_2 =$ courbe
Σ_2