Pour moi : 210.1, 210.2, 210.3

Équations différentielles linéaires

- $y'(t) + a(t)\, y(t) = b(t)$ E.D.L. 1

si a, b continues sur I intervalle

$\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & e^{-\int a(t)dt} \end{array} \right)$

$\mathcal{S} = y_1 + \mathcal{S}_0$ où y_1 sol particulière de (E)

- $a y'' + b y' + c y = d(t)$ où $a, b, c \in \mathbb{K}$

EDL 2 à coeff constants $\longrightarrow$ formules de résolution ...

Remarque. *Avant toute résolution d'une équation différentielle, on commence par reconnaître (et annoncer) le* ***type de l'équation différentielle*** *et se placer sur un* ***intervalle*** *où les résultats s'appliqueront.*

Remarque. *Les résultats de première année concernant la résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre sont à bien connaître.*

1 Équations différentielles linéaires scalaires

Définition. Soit a, b et c trois fonctions continues : $I \to \mathbb{K}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. L'équation :

$$(E)\ :\ y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$$

est appelée **équation différentielle linéaire (scalaire) d'ordre** 2.

EDL2 à coeff pas constants

On dit que $y\ :\ I \to \mathbb{K}$ est une **solution** de (E) sur I lorsque :

- y est deux fois dérivable sur I
- $\forall t \in I,\ y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$

Remarque: une solution de (E) est toujours $\mathcal{C}^2$ sur I.

car $\forall t \in I$, $y''(t) = \underbrace{-a(t)y'(t) - b(t)y(t) + c(t)}_{\text{continue}}$

donc y'' est continue

Remarque. *Lorsqu'une équation est donnée sous la forme :*

$$\alpha(t)y'' + \beta(t)y' + \gamma(t)y = \delta(t)$$

où α, β, γ et δ sont continues, on commence par définir un intervalle I sur lequel α ne s'annule pas et sur lequel l'équation est ***normalisable*** *:*

$$y'' + \frac{\beta(t)}{\alpha(t)}y' + \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)}y = \frac{\delta(t)}{\alpha(t)}$$

Pour appliquer les résultats de ce chapitre, il est donc important de travailler sur un intervalle, d'avoir une équation normalisable. Contrairement au cas des équations différentielles linéaires d'ordre 1, il n'est en général pas utile de normaliser l'équation car il n'y a pas de formule de résolution à appliquer.

On appelle **équation homogène associée à** (E) l'équation :

$$(E_0)\ :\ y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$$

où le second membre a été remplacé par 0.

Proposition. On conserve les notations et hypothèses de la définition.
L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions sur I de l'équation homogène (E_0) est un espace vectoriel, sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$.

Preuve: $(E_0) : \; y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$

$\boxed{M1}$ • $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ (cf ci-avant)

• $t \mapsto 0$ est une sol de (E_0) donc $\mathcal{S}_0 \neq \emptyset$

• Stabilité par CL:

Soit $f, g \in \mathcal{S}_0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$\forall t \in I \quad (\alpha f + \beta g)''(t) + a(t)(\alpha f + \beta g)'(t) + b(t)(\alpha f + \beta g)(t)$

$= \alpha \left[f''(t) + a(t) f'(t) + b(t) f(t) \right]$

$+ \beta \left[g''(t) + a(t) g'(t) + b(t) g(t) \right]$

$= \alpha 0 + \beta 0$ car $f, g \in \mathcal{S}_0$

$= 0$

$\boxed{M2}$ Notons $\varphi : \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$

$$y \longmapsto \underbrace{y'' + a\,y' + b\,y}_{\substack{I \longrightarrow \mathbb{K} \\ t \longmapsto y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t)}}$$

Ok! $\mathcal{S}_0 = \operatorname{Ker} \varphi$ donc $\mathcal{S}_0$ est un sous-ev de $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$

Proposition. On conserve les notations et hypothèses de la définition.

On suppose disposer de y_1, solution particulière de (E).

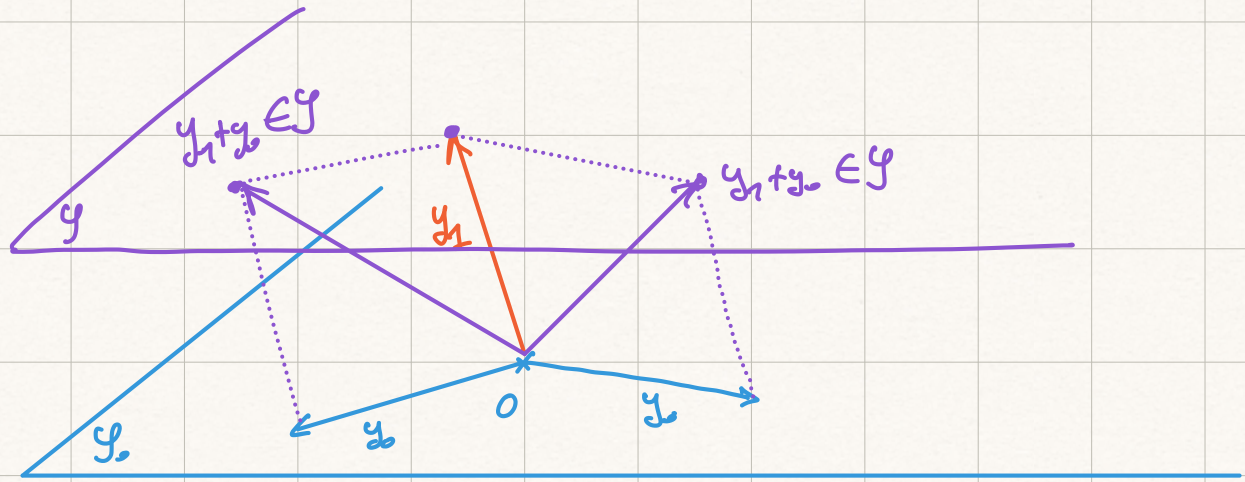
L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions sur I de l'équation (E) est l'espace affine passant par y_1 et dirigé par $\mathcal{S}_0$:

$$\mathcal{S} = y_1 + \mathcal{S}_0$$

c'est-à-dire que les solutions y de (E) sont les sommes de la solution particulière y_1 et d'une solution quelconque de l'équation (E_0).

$$\mathcal{S} = \{ y = y_1 + y_0 \text{ où } y_0 \in \mathcal{S}_0 \}$$

$\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$



Preuve: Gardons les notations de la preuve précédente.

$$y \in \mathcal{S} \iff \forall t \in I \quad y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$$

$$\iff \varphi(y) = c \qquad \text{avec } \varphi(y_1) = c \text{ car } y_1 \text{ sol part}$$

$$\iff \varphi(y) = \varphi(y_1)$$

$$\iff y - y_1 \in \underbrace{\operatorname{Ker} \varphi}_{\mathcal{S}_0} \qquad \text{par linéarité}$$

$$\iff y \in y_1 + \mathcal{S}_0$$

éq. normalisable

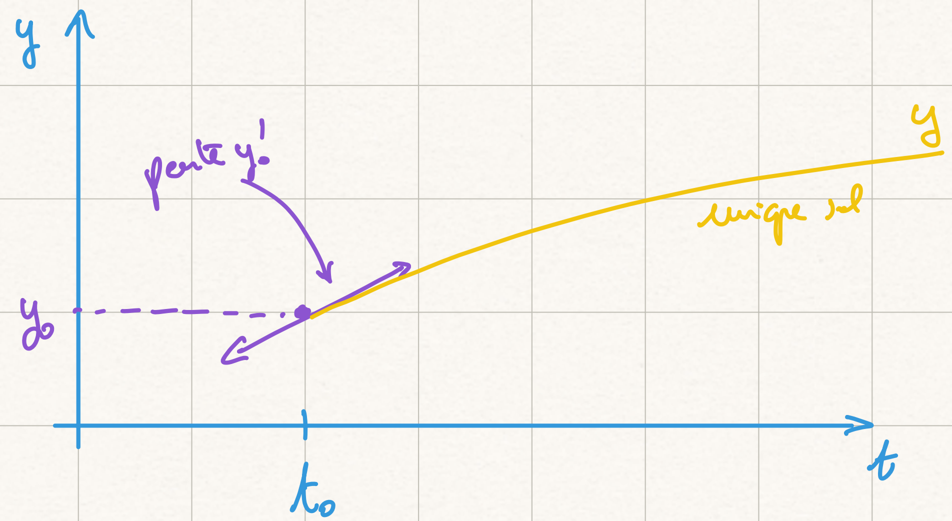
Théorème de Cauchy linéaire.

On conserve les notations et les hypothèses de la définition : I est un intervalle, a, b et c sont continues sur I.
Soit $t_0 \in I$, $y_0, y_0' \in \mathbb{K}$.
Le **problème de Cauchy** :

$$(P) \ : \ \begin{cases} y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_0' \end{cases}$$

admet une solution et une seule sur I.

(admis)



Corollaire. Toujours avec les notations et hypothèses de la définition : I est un intervalle, a, b et c sont continues sur I.
Alors l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de l'équation homogène (E_0) est un espace vectoriel de dimension 2.

C'est un plan vectoriel

Preuve : Soit $\varphi : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{K}^2$

$y \longmapsto (y(t_0), y'(t_0))$

- φ est linéaire (par linéarité de la dérivation et de l'évaluation)
- Le th précédent donne la bijectivité de φ.

Donc $\dim \mathcal{S} = \dim \mathbb{K}^2$
$= 2$

Remarque.

- *Pour connaître $\mathcal{S}_0$, il suffit donc de connaître deux solutions y_0^1 et y_0^2 non proportionnelles de (E_0). On dit parfois que (y_0^1, y_0^2), base de $\mathcal{S}_0$, est un* ***système fondamental de solutions****.*
- *$\mathcal{S}$ est donc un sous-espace affine de dimension 2, c'est-à-dire un plan affine. Si y_1 est une solution particulière de (E) et y_0^1, y_0^2 deux solutions non proportionnelles de (E_0), alors :*

$$\mathcal{S} = y_1 + \mathrm{Vect}(y_0^1, y_0^2)$$