Pour me : 208.1, 208.2, 208.3

Intégrales à paramètre

$$f : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_I h(x,t)\, dt \end{array}$$

variable d'intégration

intervalle d'intégration

1 Continuité

1.1 Continuité des intégrales à paramètre

Théorème.

Soit A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$, et $h : \begin{array}{ccc} A \times I & \to & \mathbb{K} \\ (x,t) & \mapsto & h(x,t) \end{array}$

Si :

- pour tout $t \in I$, $x \mapsto h(x,t)$ est **continue** sur A ;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- h satisfait l'**hypothèse de domination** : il existe φ telle que

$$|h(x,t)| \leqslant \varphi(t) \qquad \forall (x,t) \in A \times I$$

  où $\varphi(t)$ est positive, intégrable sur I, et indépendante de x.

Alors :

- pour tout $x \in A$, l'application $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur I
- la fonction : $f : x \mapsto \displaystyle\int_I h(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur A.

Preuve :

* l'hyp. de domination justifie l'intégrabilité de $t \mapsto h(x,t)$ sur I.

* Fixons $x_0 \in A$, Mque $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$

par caractérisation séquentielle.

<u>Montrons que</u>: $\forall (u_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ tq $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0$

on a $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x_0)$

Soit $(u_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ tq $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0$.

$$f(u_n) = \int_I h(u_n, t)\, dt$$

On pose $g_n(t) = h(u_n, t)$ (suites de fct)

On applique le th de cv dominée

* $g_n(t) = h(u_n, t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} h(x_0, t) \quad \forall t \in I$

par continuité de $x \longmapsto h(x, t)$

* <u>Dominons</u>:

$$|g_n(t)| = |h(u_n, t)|$$

$$\leq \varphi(t)$$ indep de n intégrable sur I

Donc par cv dominée, $\int_I g_n(t)\, dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I h(x_0; t)\, dt$

ie $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x_0)$

Donc f est continue en x_0, ceci pour tout $x_0 \in A$

donc f continue sur A.

Remarque. *L'hypothèse de domination est vraiment l'hypothèse fondamentale de ce théorème. L'application de ce théorème permet de justifier en particulier que f est définie sur A. Mais l'analyse menée lors de l'étude de la convergence de l'intégrale fournit en général les clefs de la domination.*

Exemple. On note $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \cos(xt)\,\mathrm{d}t$. Donner le domaine de définition de f, et étudier sa continuité.

Remarque. *Lorsque l'intégrale n'est pas généralisée, on peut utiliser comme fonction dominante une fonction constante.*

Exemple. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \cos(xt)\,\mathrm{d}t$. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Raisonnement classique. La continuité étant une propriété locale, on peut appliquer le théorème précédent localement, par exemple sur tout segment de A.

Remarque. *On ne peut pas modifier l'intervalle d'intégration ! Le caractère « local » porte bien sur la variable x, pas la variable d'intégration t.*

Exemple. Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}\sin t}{x\sqrt{t}+t}\,\mathrm{d}t$ est continue sur $]0,+\infty[$.

1.2 Limite des intégrales à paramètre

Théorème de convergence dominée à paramètre continu. interversion $\lim / \int_I$

Soit A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$, a une borne de A et $h : \begin{array}{rcl} A \times I & \to & \mathbb{K} \\ (x,t) & \mapsto & h(x,t) \end{array}$

Si :

- pour tout $t \in I$, $h(x,t) \xrightarrow[x \to a]{} \ell(t)$;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto h(x,t)$ et $t \mapsto \ell(t)$ sont continues par morceaux sur I ;
- h satisfait l'**hypothèse de domination** : il existe φ telle que

$$|h(x,t)| \leqslant \varphi(t) \qquad \forall (x,t) \in A \times I$$

  où $\varphi(t)$ est positive, intégrable sur I, et indépendante de x.

Alors :

- ℓ est intégrable sur I
- $\displaystyle\int_I h(x,t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x \to a]{} \int_I \ell(t)\,\mathrm{d}t$

Remarque. *Il s'agit d'une simple extension du théorème relatif aux suites de fonctions.*

Preuve: caractérisation séquentielle + th de cv dominée des suites de fonctions.

Exemple. On note $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t+1}}\,\mathrm{d}t$ et on donne : $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-v^2}\,\mathrm{d}v = \sqrt{\pi}$.

1. Déterminer la limite de $f(x)$ pour $x \to +\infty$. Donner un équivalent pour $x \to +\infty$.
2. Déterminer un équivalent de $f(x)$ pour $x \to 0$.

(1) • à t fixé, $\in]0,+\infty[$, $\frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

• $\left| \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}} \right| \leq e^{-2t}$ pour $x \in [2,+\infty[$, $t \in]0,+\infty[$

Donc par cv dominée, $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \int_0^{+\infty} 0\,dt = 0$

(1) Équivalent :

idée 1 : posons $u = xt$ ($x>0$ fixé)

$du = x\,dt$

t de 0 à $+\infty$

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}}\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{\frac{u}{x}+1}} \frac{du}{x}$$

$$= \frac{1}{x} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{\frac{u}{x}+1}}\,du}_{\text{limite pour } x \to +\infty \text{ ?}}$$

On note $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{\frac{u}{x}+1}}\, du$

$$* \quad \frac{e^{-u}}{\sqrt{\frac{u}{x}+1}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} e^{-u}$$

$$* \text{ Domination : } \left| \frac{e^{-u}}{\sqrt{\frac{u}{x}+1}} \right| \leq e^{-u}$$

indép de x, intégrable sur $]0,+\infty[$

Donc par cv dominée, $g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u}\, du$

$$= \left[-e^{-u}\right]_0^{+\infty}$$

$$= 1$$

<u>CCl</u> : $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$

<u>idée 2</u> : IPP

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \cdot \frac{1}{\sqrt{t+1}}\, dt$$

sous réserve...

$$= \left[-\frac{1}{x} e^{-xt} \frac{1}{\sqrt{t+1}}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -\frac{1}{x} e^{-xt} \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{(t+1)^{3/2}}\, dt$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{2x} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{(t+1)^{3/2}}\, dt}_{\text{limite pour } x \to +\infty \text{ ?}}$$

On note $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{(t+1)^{3/2}} dt$

- $\forall t \in]0,+\infty[\quad \frac{e^{-xt}}{(t+1)^{3/2}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

- Domination : $\left| \frac{e^{-xt}}{(t+1)^{3/2}} \right| \leq e^{-2t}$
$\forall x \in [2,+\infty[, \ \forall t \in]0,+\infty[$

Donc $g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

Ainsi $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x} o(1)$

$\underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$

(2) Au voisinage $x \to 0$:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{\frac{u}{x}+1}} \frac{du}{x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u+x}} du}_{\text{limite pour } x \to 0 \ ?}$$

On note $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u+x}}\, du$

- $\forall u \in]0,+\infty[\quad \frac{e^{-u}}{\sqrt{u+x}} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$

- Domination $\left| \frac{e^{-u}}{\sqrt{u+x}} \right| \leq \underbrace{\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}}_{\varphi(u)}$ indép de x

intégrable sur $]0,+\infty[$

Donc par cv dominée

$$g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\, du = \sqrt{\pi}$$

<u>Ccl</u> : $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{\pi}$

2 Dérivation

Remarque. *Étudier les variations d'une fonction f, c'est comparer $f(x)$ et $f(y)$ pour $x \leqslant y$. On peut souvent le faire en comparant les intégrandes $h(x,t)$ et $h(y,t)$.*

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t^2+1}\,dt$$

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{t^2+1}\,dt$$

Soit $x < y$

alors $\forall t \in]0, +\infty[\quad \frac{e^{-xt}}{t^2+1} > \frac{e^{-yt}}{t^2+1}$

donc $f(x) \geqslant f(y)$

Ainsi $f \searrow$.

variable de f

t var. d'intégration

$$f(x) = \int_I h(x,t)\,dt$$

2.1 Classe $\mathcal{C}^1$

Théorème.

Soit A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$, et $h : \begin{array}{rcl} A \times I & \to & \mathbb{K} \\ (x,t) & \mapsto & h(x,t) \end{array}$

Si :

- pour tout $x \in A$, $t \mapsto h(x,t)$ est cpm et **intégrable** sur I ;
- pour tout $t \in I$, $x \mapsto h(x,t)$ est **de classe** $\mathcal{C}^1$ sur A ; et $\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \dots$
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ est cpm sur I ;
- $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ satisfait l'**hypothèse de domination** : il existe φ telle que

$$\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) \qquad \forall (x,t) \in A \times I$$

où $\varphi(t)$ est positive, cpm et intégrable sur I, et indépendante de x.

Alors :

- la fonction : $f : x \mapsto \displaystyle\int_I h(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A ;
- pour tout $x \in A$: $f'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$

Remarque. *L'hypothèse de domination est l'hypothèse fondamentale. Elle justifie aussi l'intégrabilité de* $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$.

Remarque. *L'intégrabilité de* $t \mapsto h(x,t)$ *est souvent conséquence de la domination du théorème de continuité.*

Exemple. On reprend $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt)\,dt$.

Étudier la dérivabilité de f puis donner une expression simple de $f(x)$.

On donne : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Notons $h(x,t) = e^{-t^2}\cos(xt)$ pour $t \in [0,+\infty[$ $x \in \mathbb{R}$

* Soit $x \in \mathbb{R}$

- $t \mapsto h(x,t)$ cpm sur $[0,+\infty[$
- au voisi de $+\infty$ $h(x,t) = e^{-t^2} O(1)$

$$= O(e^{-t})$$

donc $t \mapsto h(x,t)$ intégrable sur $[0,+\infty[$

* $x \mapsto h(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

et $\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -t e^{-t^2} \sin(xt)$

* Dominons:

$\forall x \in \mathbb{R}$
$\forall t \in [0,+\infty[$

$$\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| = t e^{-t^2} |\sin(xt)|$$

$$\leq \underbrace{t e^{-t^2}}_{\varphi(t)} \quad \text{indép de } x$$

- φ cpm sur $[0,+\infty[$
- au voisinage de $t \to +\infty$

$$\varphi(t) = o(e^{\frac{t}{2}})\, o(e^{-\frac{3t}{2}})$$

$$= o(e^{-t}) \quad \text{intégrable en } +\infty$$

Donc φ est intégrable sur $[0, +\infty[$

Donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

et $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} -t e^{-t^2} \sin(xt)\, dt$

par intégration par parties, sous réserve de limite finie des crochets :

$$f'(x) = \left[\frac{1}{2} e^{-t^2} \sin(xt)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-t^2} (x) \cos(xt)\, dt$$

$$= 0 - \frac{x}{2} f(x)$$

Donc f est sol de l'ED : $y' + \frac{x}{2} y = 0$

donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \lambda e^{-\frac{x^2}{4}}$$

avec $f(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

donc $\boxed{f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{x^2}{4}}}$

Raisonnement classique. La dérivabilité, la classe $\mathcal{C}^1$ sont des notions locales. On peut donc appliquer le théorème précédent localement, par exemple sur tout segment de A.

Exemple. Pour $x \in]-1, +\infty[$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x \, dt$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, +\infty[$, et donner une expression de $f'(x)$ à l'aide des fonctions usuelles. En déduire une expression de $f(x)$.

Notons $h(x,t) = \dfrac{t-1}{\ln t} \cdot t^x$ pour $x \in]-1, +\infty[$ et $t \in]0, 1[$

$*$ Soit $x \in]-1, +\infty[$ fixé

- $t \longmapsto h(x,t)$ cpm sur $]0,1[$
- Au voisinage de $t \to 0$

$$h(x,t) \sim \frac{-1}{\ln t} \cdot \frac{1}{t^{-x}} = o\left(\frac{1}{t^{-x}}\right) \quad \text{avec } -x < 1$$

intégrable en 0

- Au voisinage de $t \xrightarrow{<} 1$, $u \xrightarrow{>} 0$

$$h(x, 1-u) = \frac{-u}{\ln(1-u)} (1-u)^x \underset{u \to 0}{\sim} 1 \quad \text{intégrable en } 0$$

Donc $t \longmapsto h(x,t)$ <u>intégrable sur $]0,1[$</u>

$*$ $x \longmapsto h(x,t) = \dfrac{t-1}{\ln t} t^x = \dfrac{t-1}{\ln t} e^{x \ln t}$ $\underline{\mathcal{C}^1}$

sur $]-1, +\infty[$ et

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = (t-1)\, t^x$$

* <u>Dominons</u> localement pour $x \in [a,+\infty[\subset]-1,+\infty[$

pour $t \in]0,1[$ ~~$x \in]-1,+\infty[$~~

$$\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| = |t-1|\; |t^x|$$

$$\cancel{\leq 1\; e^{x \ln t}}$$

$$\cancel{\leq 1\; e^{-1 \ln t}} \quad (\ln t < 0)$$

$$\cancel{= \frac{1}{t}}$$ ~~non intégrable sur $]0,1[$~~

$$\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leq 1 .\; t^a$$ indép de x

intégrable sur $]0,1[$

comme ex de Riemann.

<u>Donc</u> f est $\mathcal{C}^1$ sur tout $[a,+\infty[\subset]-1,+\infty[$

donc $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$

et $$f'(x) = \int_0^1 (t-1)\, t^x \, dt$$

$$= \left[\frac{1}{x+2} t^{x+2} - \frac{t^{x+1}}{x+1}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}$$

donc $f(x) = \ln|x+2| - \ln(x+1) + \text{cste}$ notée K

- <u>pour $x \to +\infty$:</u>

$*$ $\ln|x+2| - \ln|x+1| + K$

$$= \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) + K$$

$$= \ln\left(1+\frac{1}{x+1}\right) + K$$

$$\xrightarrow[x\to+\infty]{} K$$

$*$ $$f(x) = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} e^{x\ln t}\,dt$$

$$\xrightarrow[x\to+\infty]{} ?$$

- $\forall t \in]0,1[$

$$\frac{t-1}{\ln t} e^{x\ln t} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

- On a déjà dominé, sur $[2,+\infty[$ par ex

Donc par cv dominée, $f(x) \to \int_0^1 0\,dt$

<u>Ccl</u> : $K=0$, $\quad f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$

2.2 Extension à la classe $\mathcal{C}^k$

En itérant le théorème de dérivation k-fois, on peut justifier le résultat suivant :

Théorème.

Soit A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$, $h : \begin{array}{ccc} A \times I & \to & \mathbb{K} \\ (x,t) & \mapsto & h(x,t) \end{array}$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

Si :

- pour tout $x \in A$, $t \mapsto h(x,t)$ est cpm et **intégrable** sur I ;
- pour tout $t \in I$, $x \mapsto h(x,t)$ est **de classe $\mathcal{C}^k$** sur A ; et $\dfrac{\partial^p h}{\partial x^p}(x,t) = \dots$
- pour tout $p \in \{1, \dots, k\}$, pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial^p h}{\partial x^p}(x,t)$ est cpm sur I ;
- chaque $\dfrac{\partial^p h}{\partial x^p}$ satisfait l'**hypothèse de domination** :
  pour tout $p \in \{1, \dots, k\}$, il existe φ_p telle que
  $$\left| \frac{\partial^p h}{\partial x^p}(x,t) \right| \leqslant \varphi_p(t) \qquad \forall (x,t) \in A \times I$$
  où $\varphi_p(t)$ est positive, cpm et intégrable sur I, et indépendante de x.

Alors :

- la fonction : $f : x \mapsto \displaystyle\int_I h(x,t)\, \mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur A ;
- pour tout $p \in \{1, \dots, k\}$, pour tout $x \in A$: $f^{(p)}(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial^p h}{\partial x^p}(x,t)\, \mathrm{d}t$