Pour lu : 302.2, 302.4, 302.6

Ma 13 février 9h50 : math en B303

Mercredi 14 matin : TD B303 / TP physique
TP physique / TD B303

Mercredi 14 après-midi : physique B303

Trinôme 6 : TP SI ve 13h35 + colle math lundi 9h50

Trinôme 14 : colle math lu 10h45

Trinôme 9 : TP SI lundi 9h50

Variables aléatoires discrètes, la suite

Dans tout le chapitre, et sauf mention contraire, $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ désigne un espace probabilisé.

1 Espérance et variance

1.1 Espérance

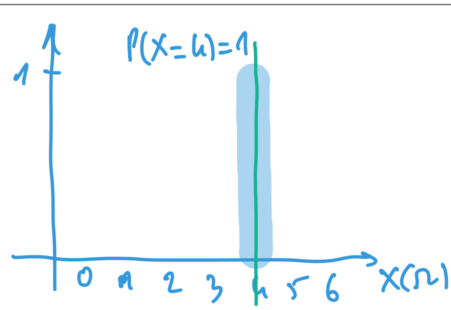
Une variable aléatoire discrète X peut prendre plusieurs valeurs, avec des probabilités différentes. On donne un sens formel à la « valeur moyenne » de X.

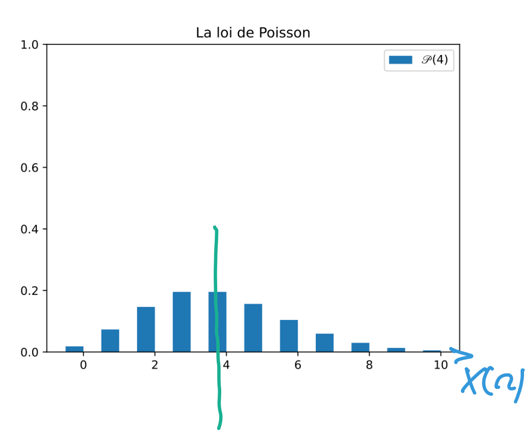
Remarque. *En première année, le support de X est fini et l'espérance est définie par :*

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) X(\omega)$$

$X(\Omega) = \mathbb{N}$

```
# loi de Poisson
E = rd.poisson(4, 20)
print(E)
# [2 5 3 7 2 3 4 4 5 5 1 4 3 7 3 4 4 8 5 3]
```





ie $\sum_{x\in X(\Omega)} |x|\, P(X=x)$ est fini

Définition. On considère X une variable aléatoire réelle discrète, dont le support fini ou dénombrable. On dit que X est **d'espérance finie** la famille $(x\,P(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas, sa somme s'appelle alors **l'espérance de** X, noté $\mathrm{E}(X)$:

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\,P(X=x)$$

- *Pensons l'espérance comme un* ***indicateur de position*** *de la v.a.*

- *Lorsque* $E(X)=0$*, on dit que la v.a.* X *est* ***centrée****.*

Remarque.

- *Si* X *est à valeurs positives, on peut calculer* $\sum_{x\in X(\Omega)} x\,P(X=x)$ *dans* $[0,+\infty]$.
- *Si* X *est à valeurs dans* $[0,+\infty]$*, on adopte la convention que* $xP(X=x)=0$ *lorsque* $x=+\infty$ *et* $P(X=x)=0$*, et on peut calculer* $\sum_{x\in X(\Omega)} x\,P(X=x)$ *dans* $[0,+\infty]$.

Proposition. Deux variables aléatoires discrètes X et Y admettant la même loi et ayant une espérance finie ont la même espérance.

$$E(X) = \sum_{x\in \underbrace{X(\Omega)}_{Y(\Omega)}} x\,P\underbrace{(X=x)}_{P(Y=x)} = E(Y)$$

Exemple. On lance deux dés, et on note X la variable aléatoire égale à la somme des numéros qui apparaissent sur les deux dés. Montrer que X est d'espérance finie et calculer $\mathrm{E}(X)$.

$\Omega = \{(x,y) \,,\ x \in [\![1,6]\!],\ y \in [\![1,6]\!]\}$

$(X=2) = \{\omega \text{ tq } X(\omega) = 2\} = \{(1,1)\}$

$(X=3) = \{\omega \text{ tq } X(\omega) = 3\} = \{(1,2),(2,1)\}$

$X(\Omega) = [\![2, 12]\!]$

$P(X=2) = \frac{1}{36}$ $\qquad$ $P(X=12) = \frac{1}{36}$

$P(X=3) = \frac{2}{36}$ $\qquad$ $P(X=11) = \frac{2}{36}$

$P(X=4) = \frac{3}{36}$ $\qquad$ $P(X=10) = \frac{3}{36}$

$P(X=5) = \frac{4}{36}$ $\qquad$ $P(X=9) = \frac{4}{36}$

$P(X=6) = \frac{5}{36}$ $\qquad$ $P(X=8) = \frac{5}{36}$

$P(X=7) = \frac{6}{36}$

Donc $\displaystyle E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \; P(X=x)$

$= 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + 5\, \frac{4}{36} + 6\, \frac{5}{36}$

$+ 7 \cdot \frac{6}{36}$

$+ 8 \cdot \frac{5}{36} + 9 \cdot \frac{4}{36} + 10 \cdot \frac{3}{36} + 11 \cdot \frac{2}{36} + 12\, \frac{1}{36}$

$= [\ldots]$

Rmq : avec le cours de 1re année

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\, P(\{\omega\})$$

$$= \sum_{(x,y) \in [\![1,6]\!]^2} X(x,y)\, \underbrace{P(\{(x,y)\})}_{\frac{1}{36}}$$

$$= \frac{1}{36} \sum_{x=1}^{6} \sum_{y=1}^{6} x+y$$

$$= [\dots]$$

par paquets où $X(x,y) = \text{cste} = k$

$$\sum_{k \in X(\Omega)} k \underbrace{\left(\sum_{\omega \in (X=k)} P(\{\omega\}) \right)}_{P(X=k)}$$

Exemple. On considère X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$, définie par sa loi en posant :

$$\forall n \geqslant 1,\ P(X = n) = \frac{1}{n(n+1)}$$

Justifier que l'on définit ainsi une loi de probabilités.
Cette variable aléatoire admet-elle une espérance finie ?

- * $\forall n \quad P(X=n) \geqslant 0$

  * Calculons dans $[0,+\infty]$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

par les sommes partielles.

$$= 1 \quad \text{par télescopage}$$

- Espérance ?

  La va est positive, donc on peut calculer dans $[0,+\infty]$

$$E(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} n\, P(X=n)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$$

$$= +\infty \qquad \text{(série positive divergente)}$$

Donc X n'est pas d'espérance finie

(n'a pas d'espérance)

Exemple. Quelle est l'espérance d'une variable aléatoire discrète constante, égale à a ?

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega \longmapsto X(\omega) = a$$

$X(\Omega) = \{a\}$

$(X = a) = \{\omega \text{ tq } X(\omega) = a\}$
$= \Omega$

$P(X = a) = 1$

Donc $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x)$

$= a \cdot 1$

$= a$

Espérance des lois usuelles.

- Si $X \sim \mathscr{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, alors $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$.

$X \sim \mathcal{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$

$$E(X) = \sum_{x \in \llbracket a, b \rrbracket} x \, P(X = x)$$

$$= \sum_{x \in \llbracket a, b \rrbracket} x \cdot \frac{1}{b-a+1}$$

$$= \frac{b+a}{2} \cdot \frac{b-a+1}{b-a+1}$$

$$= \frac{b+a}{2}$$

- Si $X \sim \mathscr{B}(p)$, alors $E(X) = p$.

$X(\Omega) = \{0, 1\}$

$P(X=0) = 1-p \qquad P(X=1) = p$

$E(X) = 0.(1-p) + 1.p$

$= p$

- Si $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, alors $E(X) = np$.

$$X(\Omega) = [\![0, n]\!]$$

$$\forall k \in [\![0, n]\!] \qquad P(X=k) = \binom{n}{k} q^{n-k} p^{k}$$

$$E(X) = \sum_{k=\cancel{0}1}^{n} k \cdot P(X=k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{n!}{k!\,(n-k)!} q^{n-k} p^{k}$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-(k-1))!} q^{(n-1)-(k-1)} p^{(k-1)}$$

$$= np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} q^{n-1-k} p^{k}$$

$$= np \left(\underbrace{q+p}_{=1}\right)^{n-1}$$

$$= np$$

- Si $X \sim \mathscr{G}(p)$, alors $E(X) = \frac{1}{p}$.

$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $P(X=n) = q^{n-1} p$

X à valeurs ≥ 0 donc on calcule dans $[0, +\infty]$

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot P(X=n)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} n q^{n-1} p$$

on sait que $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$
$\forall q \in]0,1[$

$\frac{d}{dq} \to \sum_{n=1}^{+\infty} n q^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$

$$= p \cdot \frac{1}{(1-q)^2}$$

$$= \frac{1}{p}$$

- Si $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, alors $E(X) = \lambda$.

On a $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $P(X=n) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^n}{n!}$

X est à valeurs ≥ 0, on calcule dans $[0,+\infty]$:

$$E(X) = \sum_{n=\cancel{0}\,1}^{+\infty} n\, P(X=n)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{(n-1)!}$$

$$= \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

$$= \lambda$$

Théorème.

$X(\Omega) \subset \mathbb{N}$

Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. On a :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$$

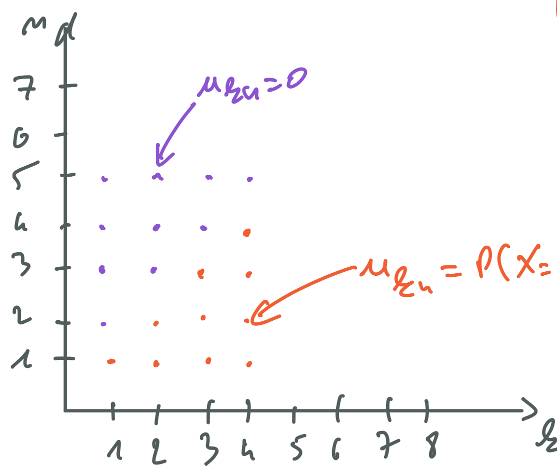
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n)$$

Preuve : On calcule dans $[0, +\infty]$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n) \qquad (X \geqslant n) = \bigcup_{k \geqslant n} (X = k)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} P(X = k)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} u_{kn} \qquad \text{où } u_{kn} = \begin{cases} P(X=k) & \text{si } k \geqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



$$= \sum_{(k,n) \in \mathbb{N}^{*2}} u_{kn}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} u_{kn} \qquad \text{par Fubini}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{k} P(X = k)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} k\, P(X=k)$$

$$= E(X)$$

Exemple. Soit $X \sim \mathscr{G}(p)$. Calculer l'espérance de X.

X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ donc (en calculant dans $[0,+\infty]$)

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X>n)$$

$(X>n)$ = succession de n échecs

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} q^n$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{1-q}$$

$$= \frac{1}{p}$$

1.2 Propriétés de l'espérance

Formule de transfert.

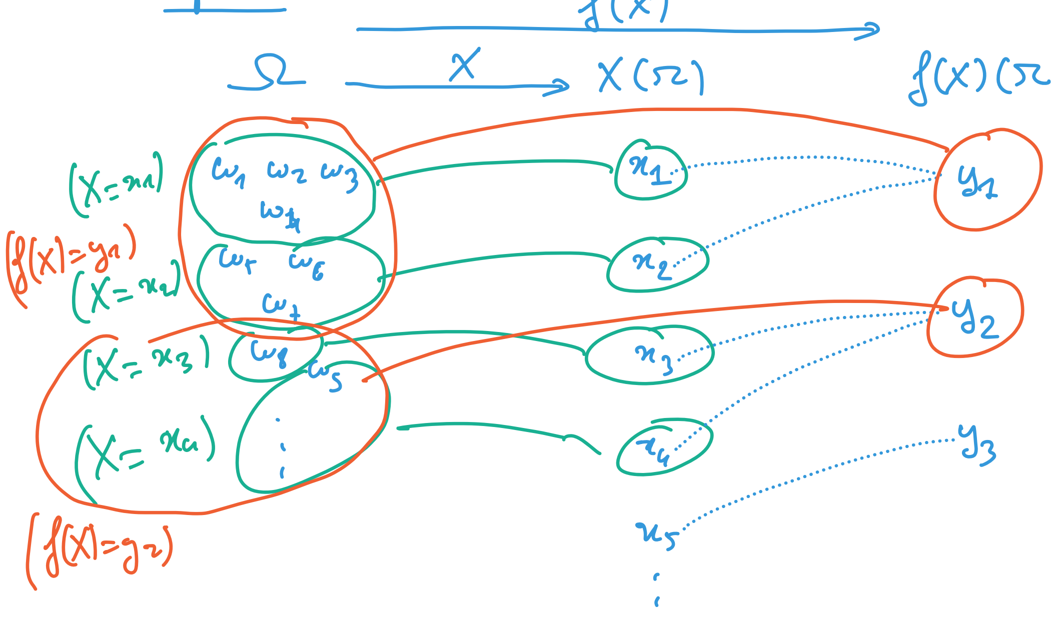
Soit X une variable aléatoire discrète et f une fonction définie sur $X(\Omega)$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. La variable aléatoire $f(X)$ a un espérance finie si et seulement si $\big(f(x)P(X=x)\big)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable. On a dans ce cas :

$$\mathrm{E}(f(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\,P(X=x)$$

Remarque. *Lorsque le support de X est fini, la somme est finie et on retrouve le résultat de première année.*

On calcule $E(f(X))$ sans chercher le support et la loi de $f(X)$, seulement à partir de celle de X.

Explicat° :



$$E(f(X)) = \sum_{y\in f(X)} y\, P(f(X)=y)$$

on scinde les événements $(f(X)=y) = \bigcup_{\substack{x\in X(\Omega)\\ f(x)=y}} (X=x)$

$$= \sum_{y \in f(X)} y \, P\Big(\bigcup_{\substack{x \in X(\Omega) \\ f(x) = y}} (X = x) \Big)$$

união disjunta

$$= \sum_{y \in f(X)} y \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ f(x) = y}} P(X = x)$$

$$= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{\substack{y \in f(X) \\ y = f(x)}} y \, P(X = x)$$

$$= \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) P(X = x) \Big(\underbrace{\sum_{\substack{y \in f(X) \\ y = f(x)}} 1}_{=1} \Big)$$

Exemple. Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $-1, 0, 1$ avec les probabilités respectives $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$ et $\frac{6}{9}$. Vérifier que $\mathrm{E}(X^2) = \frac{7}{9}$.

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "X"] \arrow[rr, bend left, "X^2"] & \{-1, 0, 1\} \arrow[r, "^2"] & \{0, 1\} \end{tikzcd}$$

Par transfert :

$$E(X^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^2 P(X = x)$$

$$= (-1)^2 \cdot \frac{1}{9} + 0^2 \cdot \frac{2}{9} + 1^2 \cdot \frac{6}{9}$$

$$= \frac{7}{9}$$

Rmq. $X^2(\Omega) = \{0, 1\}$

$$P(X^2 = 0) = P(X = 0) = \frac{2}{9}$$

$$P(X^2 = 1) = P((X = 1) \cup (X = -1))$$

$$= P(X = 1) + P(X = -1) \quad \text{par } \sigma\text{-additivité}$$

$$= \frac{7}{9}$$

Donc
$$E(X^2) = \sum_{x \in X^2(\Omega)} x P(X^2 = x)$$

$$= 0 \cdot \frac{2}{9} + 1 \cdot \frac{7}{9}$$

Linéarité de l'espérance. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes d'espérances finies. Alors pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda X + \mu Y$ est d'espérance finie et :

$$\mathrm{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathrm{E}(X) + \mu \mathrm{E}(Y)$$

Preuve :

On considère $T = (X, Y)$ couple de va, est une va

$$f : (x,y) \longmapsto \lambda x + \mu y$$

donc $\lambda X + \mu Y = f(T)$

On calcule l'espérance par transfert :

$$E(\lambda X + \mu Y) = \sum_{t \in T(\Omega)} f(t) \, P(T = t)$$

$$= \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} f(x,y) \, P(X = x, Y = y)$$

$$= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} \lambda x + \mu y \; P(X = x, Y = y)$$

$$= \lambda \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} x \, P(X = x, Y = y)$$

$$+ \mu \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} y \, P(X = x, Y = y)$$

$$= \lambda \sum_{x \in X(\Omega)} x \overbrace{\left(\sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y) \right)}^{P(X = x)}$$

$$+ \mu \sum_{y \in Y(\Omega)} y \overbrace{\left(\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x, Y = y) \right)}^{P(Y = y)}$$

$$= \lambda\, E(X) + \mu\, E(Y)$$

En toute rigueur, il faudrait :

1er cas : $\lambda X + \mu Y$ à valeur positive, on calcule

dans $[0, +\infty]$

2e cas sinon, travailler avec $|\lambda X + \mu Y|$

pour montrer la sommabilité

de $\left(\lambda x + \mu y\, P(X = x, Y = y)\right)_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$

Exemple. On (re-)lance deux dés, et on note X la variable aléatoire égale à la somme des numéros qui apparaissent sur les deux dés. Montrer que X est d'espérance finie et calculer $\mathrm{E}(X)$.

(c'est comme ça qu'il faut calculer !!)

On note Y_1, Y_2 les va donnant le résultat de chaque dé. On a $X = Y_1 + Y_2$

et $Y_1, Y_2 \sim \mathcal{U}([\![1, 6]\!])$

donc $E(X) = E(Y_1) + E(Y_2)$

$$= 2 \cdot \frac{1+6}{2}$$

$$= 7$$

- Si $X \sim \mathscr{B}(n, p)$, alors $E(X) = np$.

Soit $(Y_1, \dots, Y_n)$ des variables de Bernoulli i.i.d. $\sim \mathcal{B}(p)$

Alors $X \sim Y_1 + \dots + Y_n$

donc $E(X) = \sum_{k=1}^{n} E(Y_k)$

$= \sum_{k=1}^{n} p$

$= np$

Positivité de l'espérance.

Si $X \geqslant 0$, c'est-à-dire si X ne prend que des valeurs positives, alors $\mathrm{E}(X) \geqslant 0$.

Euh... ben oui

Croissance de l'espérance.

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles discrètes d'espérances finies telles que $X \leqslant Y$, c'est-à-dire $X(\omega) \leqslant Y(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$, alors $\mathrm{E}(X) \leqslant \mathrm{E}(Y)$.

Proposition.

Si $0 \leqslant X \leqslant Y$ et Y est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie.

(admis)

Proposition.

Si X est positive et d'espérance nulle, alors $(X = 0)$ est presque-sûr.

$$0 = E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x)$$

$$= \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \neq 0}} x P(X = x)$$

somme nulle de termes ≥ 0

donc $\forall x \in X(\Omega) \setminus \{0\}$ $\cancel{x} P(X = x) = 0$

donc $P(X \neq 0) = P\left(\bigcup_{x \neq 0} (X = x) \right)$

$= 0$

Proposition.

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes, d'espérances finies. Alors XY admet une espérance finie et :

$$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$$

Remarque. *Ce résultat peut être généralisé au cas de n variables indépendantes et d'espérance finie.*

Preuve : On note $T = (X, Y)$ couple de va

$$f : (x,y) \longmapsto xy$$

Par transfert

$$E(XY) = E(f(T))$$

$$= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xy\, P(X=x, Y=y)$$

par indépendance

$$= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xy\, P(X=x)\,P(Y=y)$$

$$= \sum_{x\in X(\Omega)} \left(\sum_{y\in Y(\Omega)} xy\, P(X=x)\,P(Y=y) \right)$$

$$= \left(\sum_{x\in X(\Omega)} x\,P(X=x)\right)\left(\sum_{y\in Y(\Omega)} y\,P(Y=y)\right)$$

$$= E(X)\,E(Y)$$

Rmq : En toute rigueur, il faudrait d'abord justifier la sommabilité en faisant le calcul avec des $|\cdot|$.