Pour me: 301.13, 301.18, 301.24

Variables aléatoires discrètes, le début

Dans ce chapitre, sauf mention contraire, $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ désigne un espace probabilisé.

1 Qu'importe l'épreuve, pourvu qu'on ait le résultat !

1.1 Définition

Définition. Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. Une **variable aléatoire discrète** X est une application :

$$X : \Omega \to X(\Omega) \subset E$$

$\omega \mapsto X(\omega)$

telle que :

- l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X est au plus dénombrable ;
- pour tout $x \in X(\Omega)$, l'ensemble $(X = x)$ est un événement.

On appelle **support de la v.a.** l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X.

Remarque. *$(X = x)$ est l'ensemble $X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\}$, image réciproque de $\{x\}$ par l'application. Dire que c'est un événement, c'est dire qu'il est dans la tribu $\mathscr{A}$.*

Remarque. *Travailler avec des variables aléatoires, c'est regrouper dans un même événement les épreuves en fonction de leur image par X.*

Remarque. *Les v.a. étudiées dans le cadre de notre programme sont toutes discrètes. Elles sont souvent à valeurs numériques, voire entières, mais on manipule aussi des v.a. à valeurs vectorielles quand on manipule des couples ou des n-uplets de v.a.*

Définition.

- Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, on parle de **v.a. réelle discrète**.
- Lorsque $E = \mathbb{R}^2$, on parle de **couple de v.a. réelles**.

Remarque. *En pratique, on n'explicite pas Ω ni $\mathscr{A}$. Mais la donnée d'une v.a. fournit toute une série d'événements : les $(X = x)$. En combinant ces événements par unions et intersections au plus dénombrables, et en passant au contraire, on connaît beaucoup d'éléments de la tribu.*

Si X est une v.a.,

$\bigcap_{x \geq 10} (X = x)$ est un événement

(inters. dénombrable d'événements)

Définition. Soit A un événement. La **fonction indicatrice** de A est :

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{1}_A : & \Omega & \to & \{0,1\} \\ & \omega & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases} \end{array}$$

Proposition. La fonction indicatrice d'un événement est une variable aléatoire discrète.

Preuve : • $X(\Omega) = \{0, 1\}$ au plus dénombrable

• $(X = 0) = \{\omega \text{ tq } X(\omega) = 0\}$

$= \{\omega \text{ tq } \omega \notin A\}$

$= \overline{A}$ est un événement comme contraire d'un événement

$(X = 1) = A$ est un événement

Donc $\forall x \in X(\Omega)$, $(X = x)$ est un événement.

1.2 Loi d'une v.a.

Définition. Donner la loi d'une v.a., c'est donner :

- $X(\Omega)$;
- pour chaque $x \in X(\Omega)$, la valeur de $P(X = x)$.

On note $X \sim Y$ lorsque les deux v.a. X et Y suivent la même loi.

L ce n'est pas $X = Y$

Exemple : lançons 2 dés (l'un rouge, l'autre vert)

On définit X = va du résultat du dé rouge

Y = va du résultat du dé vert

Mimons : * ω_1 $X(\omega_1) = 5$

$Y(\omega_1) = 6$

* ω_2 $X(\omega_2) = 1$

$Y(\omega_2) = 6$

* ...

On a bien $X \neq Y$ (ce sont deux fonctions définies sur Ω

dire $X = Y$, c'est dire

$\forall \omega \in \Omega, \quad X(\omega) = Y(\omega)$)

On a $X \sim Y$: elles suivent la même loi

$P(X = k) = \frac{1}{6}$ pour $k \in [\![1,6]\!] = X(\Omega)$

$P(Y = k) = \frac{1}{6}$ pour $k \in [\![1,6]\!] = Y(\Omega)$

Exemple. On s'intéresse au jeu du Pile ou Face infini, et on note X la variable aléatoire donnant le rang du premier lancer qui donne Pile. On suppose qu'à chaque lancer, la probabilité d'obtenir Pile est $p \in]0,1[$, et celle d'obtenir Face est $q = 1 - p$.

1. Déterminer la loi de X, appelée **loi géométrique de paramètre** p.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $P(X \leqslant n)$ et $P(X > n)$.

$\omega_1 =$ P F F P F P P F F . . . $X(\omega_1) = 1$

$\omega_2 =$ F F F P P P F F F . . . $X(\omega_2) = 4$

Loi de X :
- $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

$\mathbb{N} \leftarrow$ ou, mais $P(X=0)=0$

$\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\} \leftarrow$ on fait comme si...

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$(X=n) = F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_{n-1} \cap P_n$$

où $F_k = * * \dots * \underset{k}{F} * * \dots * \dots$

donc
$$P(X=n) = P(F_1 \cap \dots \cap F_{n-1} \cap P_n)$$
$$= P(F_1) \times \dots \times P(F_{n-1}) \times P(P_n)$$ par indépendance
$$= q \times \dots \times q \times p$$
$$= q^{n-1} p$$

- $(X \leq n) = \bigcup_{k=1}^{n} (X=k)$ union disjointe

par σ-additivité

$$P(X \leq n) = \sum_{k=1}^{n} P(X=k)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} p \qquad \text{somme géométrique}$$
$$= p \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \qquad q = 1-p$$
$$= 1 - q^n$$

et $P(X>n) = 1 - P(\overline{X>n})$
$$= 1 - P(X \leq n)$$
$$= q^n$$

Ah ! Ben oui !

$(X>n)$ = pile après (strictement) le n° lancer
$$= F_1 \cap \dots \cap F_n$$

par indépendance $P(X>n) = q^n$

Pour une variable géométrique X, l'événement $(X>n)$ est celui qu'on utilisera de préférence.

Distribution de proba ?

Une famille $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(n, p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une distribution de proba <u>si</u> les p_n sont ≥ 0 et de somme 1.

On peut définir à partir d'une distribution de proba la loi d'une va X en posant

$X(\Omega) = \mathbb{N}$ ou $X(\Omega) = N$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(X=n) = p_n$ $\quad P(X=n) = p_n$

Méthode. Si l'on définit une v.a. X, que l'on donne pour $x \in X(\Omega)$ la valeur de $P(X=x)$, montrer que X suit une loi de probabilité revient à vérifier que :

- $\forall x \in X(\Omega),\ P(X=x) \geqslant 0$;
- $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x) = 1$.

Bref, $\left(P(X=x)\right)_{x \in X(\Omega)}$ est une distribution de proba.

Rmq : pas d'homogénéité dans la façon dont la question est posée.

" Mque $P(X=x) = \dots$ définit une loi de proba "

" Mque X est une va ".

" distribution de proba ".

Exemple. Soit X un v.a. sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, à valeurs dans $[\![2, +\infty[\![$, et telle que :

$$\forall n \geqslant 2,\ P(X=n) = \zeta(n) - 1$$

Montrer que X suit une loi de probabilité.

i.e. : $\begin{cases} \forall n \quad P(X=n) \geqslant 0 \\ \sum P(X=n) = 1 \end{cases}$

- $\forall n \geq 2$, $\zeta(n) - 1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^n} - 1$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^n} \geq 0$$

- On somme des termes positifs, on calcule dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \zeta(n) - 1 = \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^n}$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{k^n} \qquad \text{(Fubini positif)}$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{k}}$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)} \qquad \frac{k-(k-1)}{k(k-1)}$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

$*$

$$= 1 \qquad \text{par télescopage}$$

La somme finie justifie la convergence (sommabilité) des séries envisagées.

$\triangle$ $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \cancel{\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k}}$

$*$ $\sum_{k=2}^{K} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \sum_{k=2}^{K} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{K} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{K-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{K} \frac{1}{k}$

1.3 Fonction d'une variable aléatoire

Proposition. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans E et $f : E \to F$ une fonction définie sur $X(\Omega)$. Alors :

$$f(X) : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & F \\ \omega & \mapsto & f(X(\omega)) \end{array}$$

est une variable aléatoire discrète.

Remarque. *La notation peut être trompeuse. Une v.a. étant une fonction, il s'agit bien de la composée de fonctions* $f \circ X$.

Expliquer-le

- X est va $\quad X(\Omega)$ au plus dénombrable

$\forall x \in X(\Omega) \quad (X=x)$ événement.

- $f(X) : \Omega \longrightarrow X(\Omega) \longrightarrow \underset{f(X)(\Omega)}{f(X(\Omega))}$

$\omega \longmapsto X(\omega) \longmapsto f(X(\omega))$

$f(X)(\Omega)$ est "plus petit" que $X(\Omega)$

donc $f(X)(\Omega)$ est au plus dénombrable.

- Prenons $y \in f(X)(\Omega)$

$\omega \in (f(X) = y) \iff f(X(\omega)) = y$

$\iff X(\omega) \in f^{-1}(\{y\})$

$\iff \omega \in (X \in f^{-1}(\{y\}))$

Donc $(f(X) = y) = \bigcup_{t \in f^{-1}(\{y\}) \cap X(\Omega)} (X = t)$

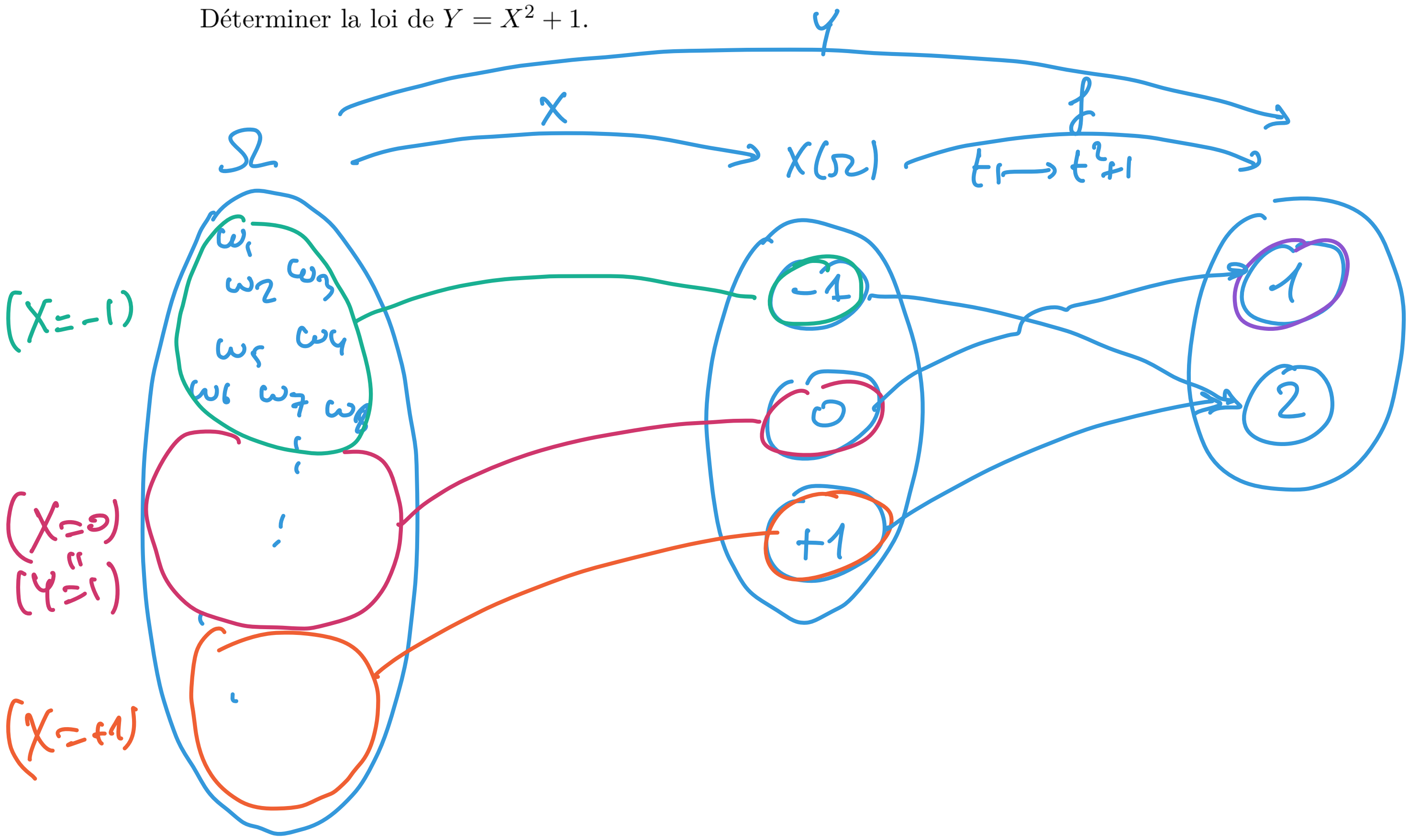
Comme $f(X)(\Omega)$ est au plus dénombrable, $X(\Omega) \cap f^{-1}(\{y\})$ aussi donc $(f(X) = y)$ est un événement comme union au plus dénombrable d'événements.

Proposition. Si $X \sim Y$, alors $f(X) \sim f(Y)$.

Exemple. On considère X v.a. telle que $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et :

$$P(X = -1) = P(X = 0) = \frac{1}{4} \text{ et } P(X = 1) = \frac{1}{2}$$

Déterminer la loi de $Y = X^2 + 1$.



$(Y=2) = (X=1) \cup (X=-1)$

On a : • $Y(\Omega) = \{1, 2\}$ car $f(1) = 2$, $f(0) = 1$, $f(-1) = 2$

• $(Y=1) = (X^2+1=1)$

$= (X^2 = 0)$

$= (X = 0)$

donc $P(Y=1) = P(X=0) = \frac{1}{4}$

• $(Y=2) = (X^2+1=2)$

$= (X^2 = 1)$

$= (X = 1) \cup (X = -1)$

union disjointe

donc $P(Y = 2) = P(X = 1) + P(X = -1)$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

2 Lois usuelles

Conseil. *Il n'est pas inutile de ficher les lois usuelles.*

ou tout ensemble fini

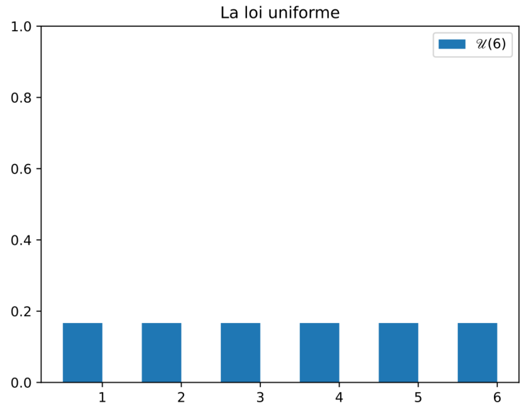
2.1 Loi uniforme

Définition. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $[\![1, n]\!]$ lorsque :

$$X(\Omega) = [\![1, n]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1, n]\!],\ P(X = k) = \frac{1}{n}$$

On note alors $X \sim \mathscr{U}([\![1, n]\!])$.

Interprétation. *C'est la loi du choix « au hasard » d'un élément dans un ensemble à n éléments.*



distrib de proba $\left(\frac{1}{6}\right)_{1 \leq i \leq 6}$

2.2 Loi de Bernoulli

Définition. Soit $p \in]0,1[$. Une variable aléatoire X suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p lorsque :

$$X(\Omega) = \{0,1\} \quad \text{et} \quad P(X=1) = p,\ P(X=0) = 1-p$$

On note alors $X \sim \mathscr{B}(p)$.

Exemple. Toute expérience à deux issues, comme le jeu de Pile ou Face, est naturellement modélisée par une v.a. suivant une loi de Bernoulli.

Exemple. Si A est un événement, sa fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$:

$$\mathbb{1}_A \sim \mathscr{B}(P(A))$$

En effet : • $\mathbb{1}_A(\Omega) = \{0,1\}$

• $\omega \in (\mathbb{1}_A = 1) \Leftrightarrow \mathbb{1}_A(\omega) = 1$

$\Leftrightarrow \omega \in A$

donc $P(\mathbb{1}_A = 1) = P(A)$

• de même $P(\mathbb{1}_A = 0) = P(\bar{A})$

$= 1 - P(A)$

donc $\mathbb{1}_A \sim \mathcal{B}(P(A))$

2.3 Loi binomiale

Définition. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. Une variable aléatoire X suit une **loi binomiale** de paramètres n et p lorsque :

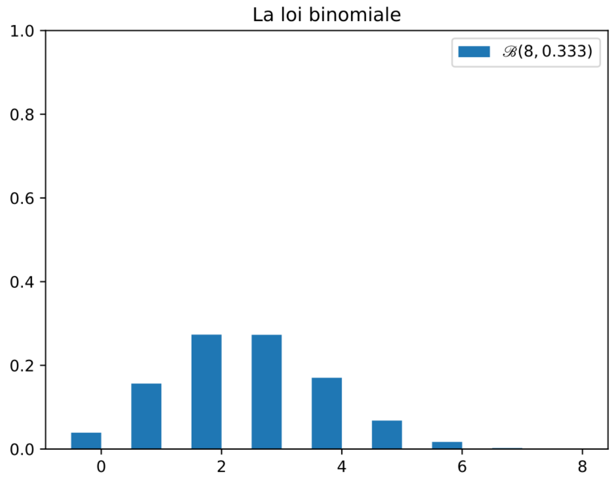
$$X(\Omega) = [\![0,n]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0,n]\!],\ P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On note alors $X \sim \mathscr{B}(n,p)$.

Interprétation. *C'est la loi du nombre de succès dans la répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes, de même paramètre p.*

Proposition. Si $X_1, \dots, X_n$ sont n variables de Bernoulli, indépendantes et de même paramètre p, alors :

$$X_1 + \cdots + X_n \sim \mathscr{B}(n,p)$$



Preuve (par récurrence sur n)

$$P(X=k) = \binom{n}{k} q^{n-k} p^k \qquad q = 1-p$$

réaliser $(X=k)$, c'est choisir k épreuves de Bernoulli parmi les n qui correspondent aux succès (et $n-k$ aux échecs)

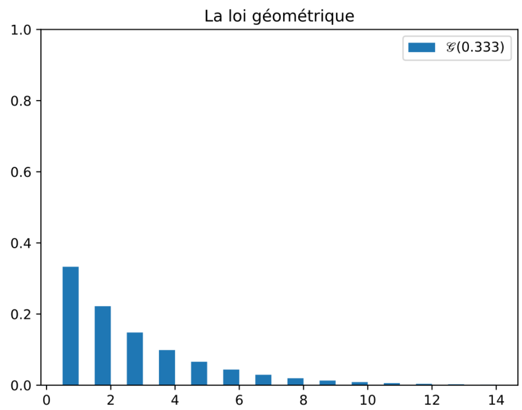
2.4 Loi géométrique

Définition. Soit $p \in]0,1[$. Une variable aléatoire X suit une **loi géométrique** de paramètre p lorsque :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = (1-p)^{k-1}p$$

On note alors $X \sim \mathscr{G}(p)$.

Interprétation. *C'est la loi du numéro du premier succès dans la répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes, de même paramètre p.*



$P(X > n) = q^n$ (à utiliser directement, à comprendre facilement)

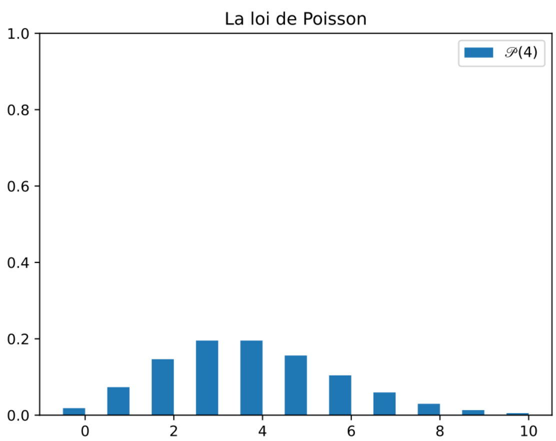
2.5 Loi de Poisson

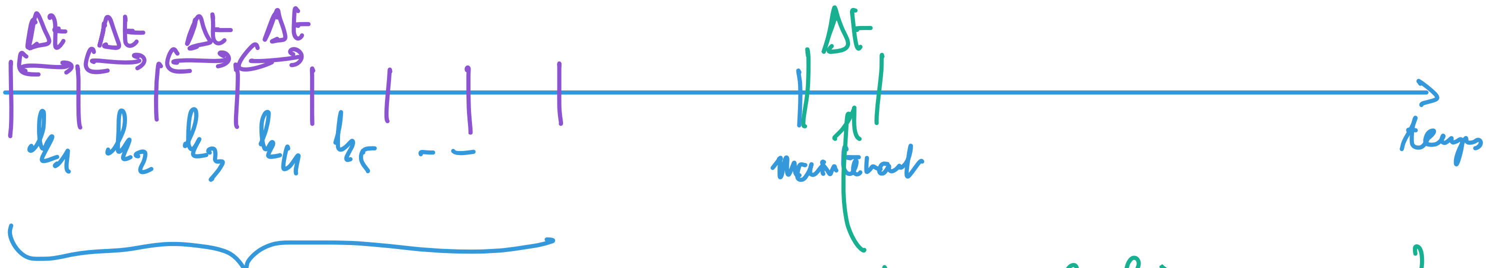
Définition. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Une variable aléatoire X suit une **loi de Poisson** de paramètre λ lorsque :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

On note alors $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$.

Interprétation. *On l'appelle la loi « des événements rares » : lorsqu'un événement rare arrive en moyenne λ fois sur une période T, c'est la loi du nombre de fois où cet événement se produit sur une période donnée.*





en moyenne : λ chance que le phénomène arrive dans Δt

est-ce que le phénomène arrive ?
X va du nb de fois qu'il arrive
$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

C'est bien une loi de proba :
- $P(X=k) \geq 0$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$

301.7

$$E = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq N} A_n$$

a) $\mathcal{A}$ n'est pas donnée, mais on sait que les A_n sont dans $\mathcal{A}$.
et $\mathcal{A}$ est stable par ...

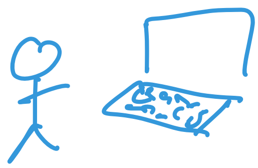
E est un événement comme intersection dénombrable d'unions dénombrables d'événements.

b) $\omega \in \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq N} A_n$

$\iff \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N \quad \omega \in A_n$

$\iff \omega$ réalise une infinité des A_n.

c) Paradoxe du singe savant.



26 touches

écrit l'œuvre de Shakespeare ?
↳ L lettres

A_1 = « lors des L premières frappes de touches,
il écrit l'œuvre de Shakespeare »

A_2 = « —— $L+1$ à $2L$ —— .. »

A_n = « — — $(n-1)L+1$ à nL — — »

$$P(A_n) = \frac{1}{26^L} \qquad \sum P(A_n) = +\infty$$

donc $P(E) = 1$: presque sûrement, le singe va écrire de Shakespeare une infinité de fois comme il faut.

302.7

(a) $X \sim \mathcal{U}(⟦1,6⟧)$

(b) Chaque tirage est une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ (succès : tirer rouge
échec : tirer autre couleur)

X est le nombre de succès dans la répétition de 8 épreuves de Bernoulli indép (avec remise) et de même paramètre $\frac{1}{3}$

donc $X \sim \mathcal{B}\left(8, \frac{1}{3}\right)$

$$P(X=k) = \binom{8}{k} \frac{2}{3}^{8-k} \frac{1}{3}^{k}$$

pas de Σ