Pour moi : 301.4, 301.5, 301.6

3.2 Probabilités composées

Probabilités composées.

Pour deux événements A et B tels que $P(B) > 0$, on a :

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)\, P(B)$$

Plus généralement, si $A_1, \ldots, A_m$ sont des événements tels que $P\left(\bigcap_{i=1}^{m-1} A_i\right) > 0$, on a :

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^{m} A_i\right) &= P(A_m \mid A_{m-1} \cap \cdots \cap A_2 \cap A_1) \ldots P(A_3 \mid A_2 \cap A_1)\, P(A_2 \mid A_1)\, P(A_1) \\ &= \prod_{i=1}^{m} P\Big(A_i \mid \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j\Big) \end{aligned}$$

3.3 Probabilités totales

Probabilités totales.

Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet ou quasi-complet d'événements, avec I fini ou dénombrable. Pour tout événement B :

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{i \in I} P(B \cap A_i) \\ &= \sum_{i \in I} P(B|A_i)P(A_i) \end{aligned}$$

3.4 Formule de Bayes

Formule de Bayes.

Soit A et B deux événements tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$. Alors :

$\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A})} \qquad \text{si de plus } P(\overline{A}) \neq 0 \end{aligned}$$

Plus généralement, si $(A_i)_{i\in I}$ est un système complet ou quasi-complet d'événements, avec I au plus dénombrable, alors pour tout événement B de probabilité non nulle et tout i :

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum\limits_{k\in I} P(B|A_k)P(A_k)}$$

en adoptant la convention $P(B|A_i)P(A_i) = 0$ si $P(A_i) = 0$.

Exemple.

1. On dispose d'un test de dépistage d'une maladie. En principe, celui-ci est positif si le patient est malade, mais le test n'est pas fiable à 100 %.
   Plus précisément, si le patient est malade alors le test est positif 99.9 fois sur 100.
   Mais 4 fois sur 1000 il est positif sur une personne non malade.
   On sait qu'environ 2 ‰ de la population est atteinte de la maladie.
   Quelle est la probabilité qu'une personne soit malade sachant que le test est positif ?

Notons $M =$ "le patient est malade"

$A =$ "le test est positif"

$\omega_1 =$  malade test >0

$\omega_2 =$  malade test <0

On cherche $P(M|A)$

On connait $P(A|M) = \frac{999}{1000}$

$P(A|\bar{M}) = \frac{4}{1000}$

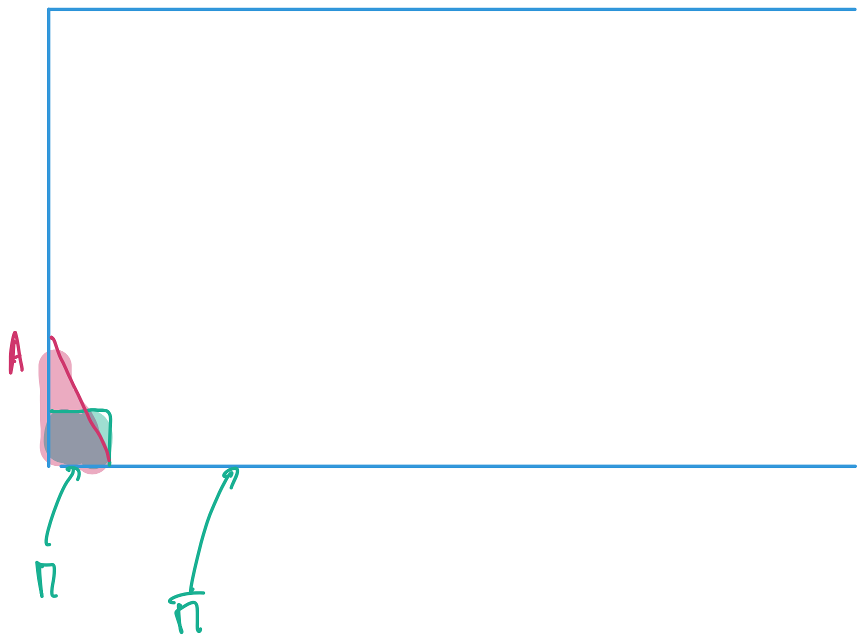
$P(M) = \frac{2}{1000}$

par la formule de Bayes

Donc $$P(M|A) = \frac{P(A|M)\,P(M)}{P(A|M)\,P(M) + P(A|\bar{M})\,P(\bar{M})}$$

$$= \frac{\frac{999}{1000}\cdot\frac{2}{1000}}{\frac{999}{1000}\cdot\frac{2}{1000} + \frac{4}{1000}\cdot\frac{998}{1000}}$$

$$\simeq \frac{1}{3}$$



2. On dispose d'un second test de dépistage de la même maladie, moins bon que le premier. Mais on le teste maintenant sur la population qui s'est révelée positive au premier test.
   Si la personne est malade le test B est positif 97 fois sur 100. Mais 8 fois sur 1000 il est positif sur une personne non malade. Environ 1/3 de la population testée est atteinte de la maladie.
   Quelle est la probabilité qu'une personne testée soit malade sachant que le test B est positif ?

B = « le second test est positif »

M = « la personne est malade »

On cherche $P(M \mid B)$

On connaît $P(B \mid M) = \frac{970}{1000}$

$P(B \mid \bar{M}) = \frac{8}{1000}$

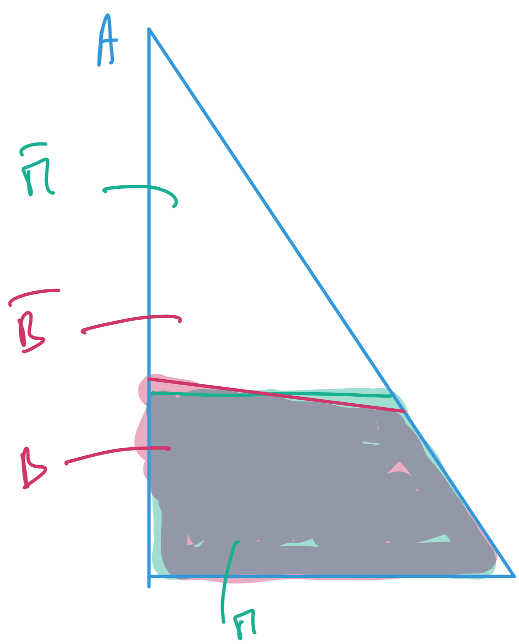
$P(M) = \frac{1}{3}$

Donc $P(M \mid B) = \dfrac{P(B \mid M)\,P(M)}{P(B \mid M)\,P(M) + P(B \mid \bar{M})\,P(\bar{M})}$

$$= \frac{\frac{970}{1000} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{970}{1000} \cdot \frac{1}{3} + \frac{8}{1000} \cdot \frac{2}{3}}$$

$$= \frac{970}{986}$$

$$\simeq 97.- \%$$



4 Indépendance

4.1 Indépendance de deux événements

Définition. Deux événements A et B sont dits **indépendants** si et seulement si :

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

Remarque. *Dans le cas où $P(B) > 0$, cela revient à dire $P(A \mid B) = P(A)$, c'est-à-dire que la réalisation de B n'influe pas sur la réalisation de A.*
Deux événements disjoints ne sont en général pas indépendants : la réalisation de l'un interdit la réalisation de l'autre.

Proposition. Si A et B sont indépendants, alors :

- A et $\overline{B}$ sont indépendants
- $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants

Remarque. *Le résultat s'étend au cas de n événements.*

4.2 Indépendance d'une famille finie d'événements

Définition. Soit $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ une famille finie d'événements.

- Les événements sont **deux à deux indépendants** si et seulement si, pour tout $i, j \in \{1, \ldots, m\}$:
$$i \neq j \implies P(A_i \cap A_j) = P(A_i)\,P(A_j)$$
- Les événements sont **indépendants** si et seulement si, pour toute partie (finie) $J \subset \{1, \ldots, m\}$ non vide,
$$P\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J} P(A_i)$$

Remarque. *On utilise parfois l'expression « mutuellement indépendants » pour désigner l'indépendance.*
Des événements peuvent être deux à deux indépendants sans être indépendants.

Exemple. On lance deux dés discernables, et on considère les événements :

$$\begin{aligned} A &= \text{« le premier dé donne un résultat pair »}\\ B &= \text{« le second dé donne un résultat pair »}\\ C &= \text{« la somme des résultats des deux dés est paire »}\end{aligned}$$

Les événements A, B et C sont deux à deux indépendants mais ne sont pas (mutuellement) indépendants.

Si $(A_i)_{i\in I}$ famille dénombrable d'événements.

Ces événements sont indépendants

ssi $\forall J$ fini, $J \subset I$, $(A_i)_{i\in J}$ indép

i.e. $P\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J} P(A_i)$

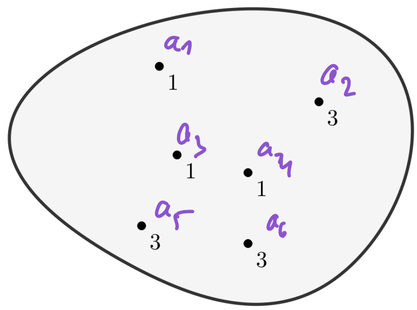
Prop : Si $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ indép

alors $(A_1, \overline{A_2}, A_3, \ldots, A_n)$ indép

5.4 Annexe : libérons les sommes !

5.4.1 Somme d'une famille finie

Exemple. On considère la famille de nombres décrite par :



Qu'est-ce que la somme de cette famille de nombres ?

On somme (1, 3, 1, 1, 3, 3)

on a indexé les éléments et on calcule

$$\sum_{i=1}^{6} a_i = 1 + 3 + 1 + 1 + 3 + 3$$

Somme finie

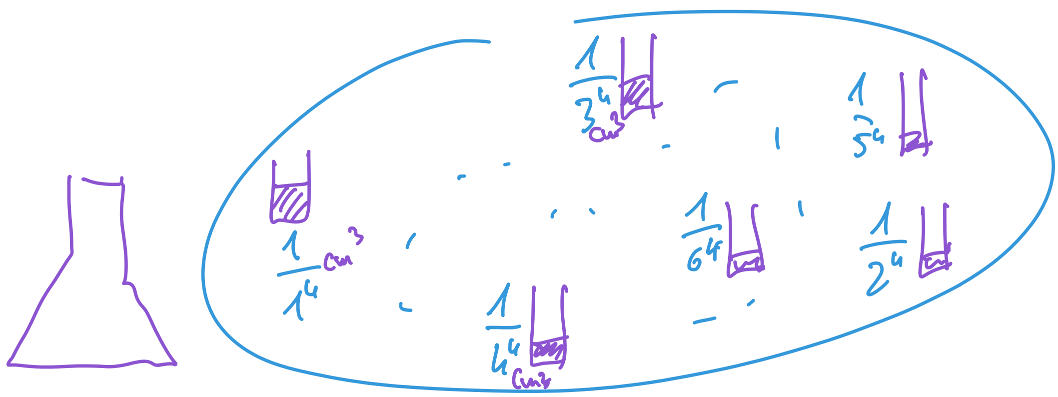
On peut utiliser la commutativité, l'associativité

On peut faire les paquets qu'on veut → on obtient le même résultat.

5.4.2 Somme d'une famille de réels positifs

Exemple. On considère la famille de réels positifs $\left(\frac{1}{n^4}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ indexée par $\mathbb{N}^*$. Qu'est-ce que la somme de cette famille ?

Et la somme de la famille $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$?



peut-on "sommer" ces termes ?

$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^4}$ ou sa somme est $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^4}$

Est-ce que l'ordre des termes a une conséquence sur la valeur de la somme ?

Image : (de transvaser du liquide)

Si les termes sont positifs, quel que soit l'ordre, la somme partielle ne fait qu'augmenter.

Résultat : La somme d'une famille de termes ≥ 0 est la somme obtenue en faisant le calcul comme on le souhaite (modif de l'ordre, du regroupement par paquets etc...)

Si la somme obtenue n'est pas finie, on convient que la somme est $+\infty$.

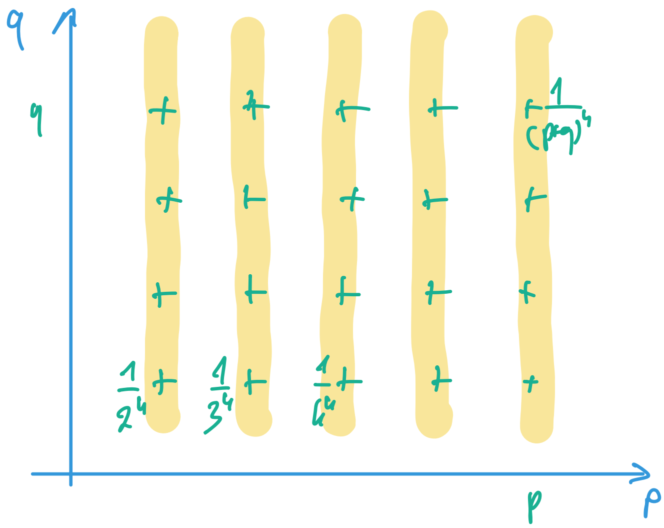
$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^4}$$ est la somme la famille des $\left(\frac{1}{n^4}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$ la limite de la suite des sommes partielles.

On peut écrire, en proba, $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n} = +\infty$

5.4.3 Somme d'une famille dénombrable de réels positifs

Exemple. On considère la famille de réels positifs $\left(\dfrac{1}{(p+q)^4}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ indexée par $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$. Qu'est-ce que la somme de cette famille ?



il n'y a pas d'ordre naturel.

Les termes sont positifs, donc on peut sommer comme on veut.

<u>Sommer par paquets verticaux</u>

On s'intéresse à

$$\underbrace{\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\underbrace{\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{(p+q)^4}}_{\text{valeur finie }\left(\sum_q \frac{1}{(p+q)^4}\text{ cv}\right)}\right)}_{\text{cv ?!}}$$

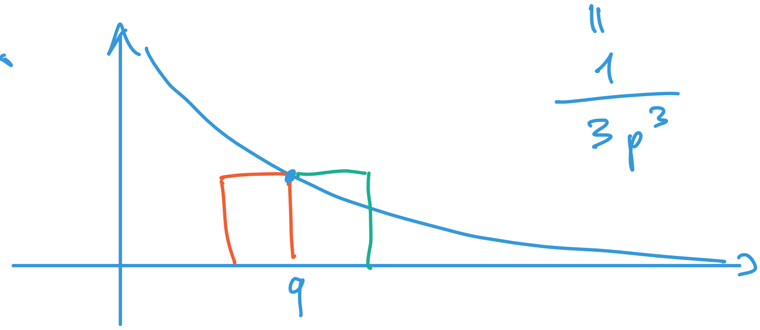
Notons $\quad v_p = \displaystyle\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{(p+q)^4} \quad$ équivalent ?

Comp. série intégrale avec $t \longmapsto \dfrac{1}{(p+t)^4}$ ↘

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(p+t)^4}\,dt \leq \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{(p+q)^4} \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{(p+t)^4}\,dt$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(p+t)^4}\,dt = \left[-\frac{1}{3}\frac{1}{(p+t)^3}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{3(p+1)^3}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(p+t)^4}\,dt = \frac{1}{3p^3}$$



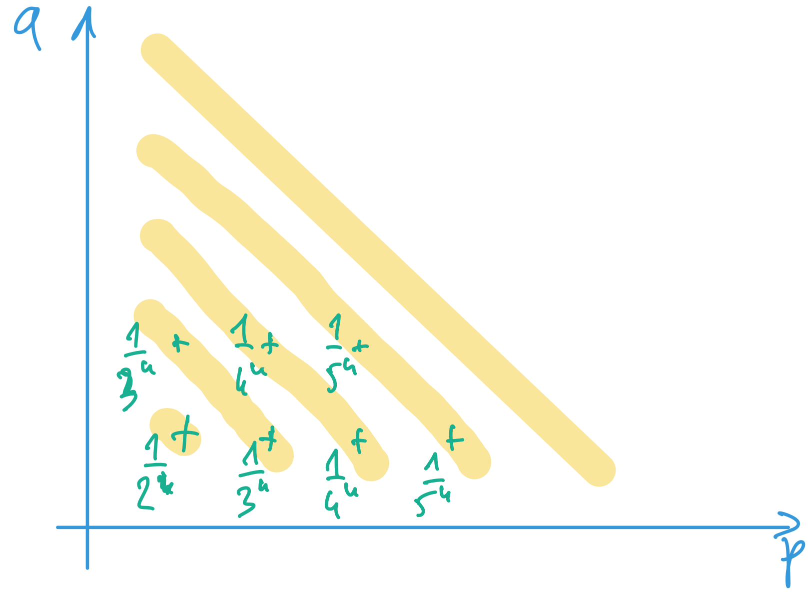
donc $\quad v_p \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{3p^3}$

Donc $\sum v_p$ cv

on dit que $\left(\dfrac{1}{(p+q)^4}\right)_{p,q}$ est sommable

et sa somme est $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{(p+q)^4}\right)$

Autre étude :



Faisons des paquets comme ci-dessus.

$$\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\sum_{p+q=k}\frac{1}{(p+q)^4}\right)$$

$$=\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\sum_{\substack{p+q=k\\ p,q\geqslant 1}}\frac{1}{k^4}\right)$$

$$=\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{k-1}{k^4}$$

$$=\sum_{k=\cancel{2}\,1}^{+\infty}\frac{1}{k^3}-\frac{1}{k^4}$$

$$=\zeta(3)-\zeta(4)$$

Résultat. On admet que l'on sait associer à toute famille au plus dénombrable $(x_i)_{i\in I}$ de réels positifs sa **somme** $\sum_{i\in I} x_i \in [0,+\infty]$ et que, pour tout découpage en paquets $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ de I, on a :

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i\in I_n} x_i \right)$$

La famille $(x_i)_{i\in I}$ est dite **sommable** lorsque $\sum_{i\in I} x_i < +\infty$.

En pratique. Dans le cas d'une famille de réels positifs, on peut découper, calculer, majorer les sommes directement, la finitude de la somme valant preuve de sommabilité. Bref, on calcule « naturellement » avec les sommes de familles de réels positifs.

Exemple. Pour $s > 1$, on note $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$. Montrer que :

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n^{s+1}} \right)$$

5.4.4 Somme d'une famille de réels quelconques

Exemple. On considère la famille de réels $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ indexée par $\mathbb{N}^*$. Qu'est-ce que la somme de cette famille ?

N'existe pas au sens de la sommabilité

5.4.5 Somme d'une famille dénombrable de réels quelconques ou de complexes

Définition. Une famille $(x_i)_{i\in I}$ au plus dénombrable de nombres réels ou complexes est dite **sommable** si et seulement si $(|x_i|)_{i\in I}$ l'est.

Proposition. Si $|x_i| \leqslant y_i$ pour tout $i \in I$, la sommabilité de $(y_i)_{i\in I}$ implique celle de $(x_i)_{i\in I}$.

En pratique. En cas de sommabilité, les sommes se manipulent « naturellement » grâce aux propriétés suivantes : croissance, linéarité, sommation par paquets.

Cas des sommes doubles. Dans le cas particulier des familles indexées par $\mathbb{N}^2$, le découpage par paquets « verticaux » ou « horizontaux » s'appelle le *théorème de Fubini*, et l'on retrouve le *produit de Cauchy* étudié avec les séries numériques.

$$\sum_{i,j} u_{ij} = \sum_i \sum_j u_{ij} = \sum_j \sum_i u_{ij}$$

paquets antidiagonaux.