Pour moi : 301.1, 301.2, 301.3

Ω univers = l'ensemble des issues ω

$\mathcal{A}$ tribu = l'ensemble des événements A

2 Probabilité

2.1 Définition

Définition. On appelle **probabilité** sur $(\Omega, \mathscr{A})$ une application P définie sur $\mathscr{A}$ telle que :

- P est à valeurs dans $[0, 1]$ $\forall A \ P(A) \geqslant 0$
- $P(\Omega) = 1$
- Si $(A_n)_{n \in N}$ est une famille au plus dénombrable d'événements deux à deux disjoints :

$$P\left(\bigcup_{n\in N} A_n\right) = \sum_{n\in N} P(A_n) \qquad \text{(propriété de } \sigma\text{-additivité)}$$

On dit alors que $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est un **espace probabilisé**.

Remarque. *Si Ω est dénombrable, on peut écrire $\Omega = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$. Si de plus $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, alors par σ-additivité, $\sum P(\{x_n\})$ converge et sa somme vaut 1. Et si $A \subset \Omega$, A est dans $\mathscr{A}$ et $P(A) = \sum_{x\in A} P(\{x\})$: la situation est analogue à celle où Ω est fini.*

$$P : \mathcal{A} \longrightarrow \cancel{\mathbb{R}}\ [0,1]$$
$$E \longmapsto P(E)$$

$$P\left(\bigcup_{n\in N} A_n\right) = \sum_{n\in N} P(A_n)$$

N partie de $\mathbb{N}$

$\omega \in \bigcup_{n\in N} A_n \iff \exists n_0 \in N$ tq $\omega \in A_{n_0}$

les A_n sont 2 à 2 disjoints (ou disjoints)

$\forall i,j \in N \quad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$

N est une partie de $\mathbb{N}$ les A_n sont indexés par des entiers

C'est la somme (de la série à termes $\geqslant 0$) des $P(A_n)$

Proposition.

- $P(\varnothing) = 0$
- Si $A \in \mathscr{A}$, alors $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$
- Si $A, B \in \mathscr{A}$, alors $A \subset B \implies P(A) \leqslant P(B)$.
- Si $A, B \in \mathscr{A}$, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

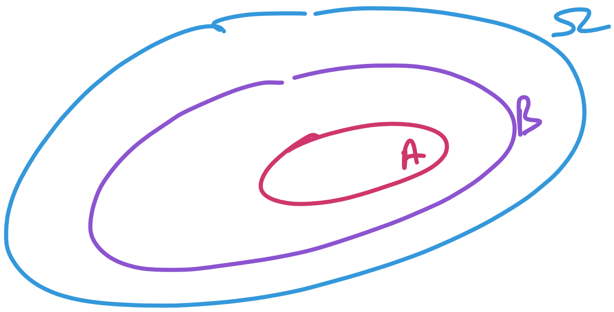
Preuve : • $\Omega = \Omega \cup \phi$ union disjointe

donc par σ-additivité $P(\Omega) = P(\Omega) + P(\phi)$

donc $P(\phi) = 0$

• $\Omega = A \cup \bar{A}$ union disjointe

donc par σ-additivité $\underset{\overset{\shortparallel}{1}}{P(\Omega)} = P(A) + P(\bar{A})$

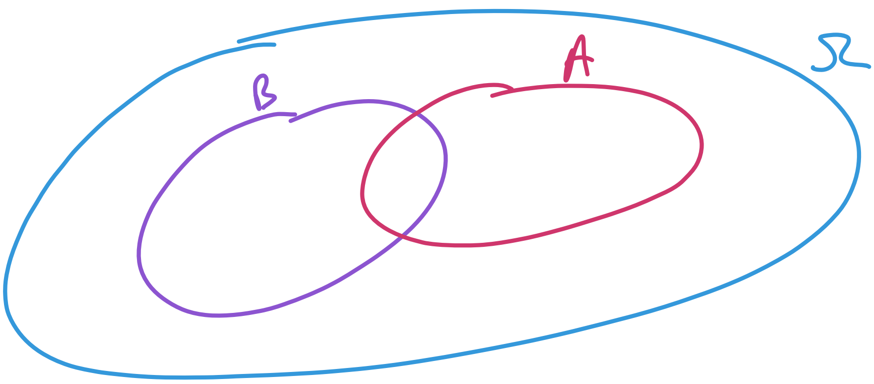
• 

$B = A \cup (B \setminus A)$ union disjointe

donc $P(B) = P(A) + \underbrace{P(B \setminus A)}_{\geqslant 0}$

$\geqslant P(A)$

• Si $A, B \in \mathscr{A}$, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



$A \cup B = (B \setminus A) \cup (A \cap B) \cup (A \setminus B)$ union disjointe

$= B \cup (A \setminus B)$ union disjointe

donc par σ-additivité $P(A \cup B) = P(B) + P(A \setminus B)$

$A = A \cap B \cup (A \setminus B)$ union disjointe

donc par σ-additivité $P(A) = P(A \cap B) + P(A \setminus B)$

Proposition. La σ-additivité, sans l'hypothèse « disjointe », devient :

$$P\left(\bigcup_{n\in N} A_n\right) \leqslant \sum_{n\in N} P(A_n)$$

Remarque. *On convient que, s'il s'agit d'une famille infinie et que la série à terme général positif* $\sum P(A_n)$ *diverge, sa somme vaut* $+\infty$.

Ce résultat porte parfois le nom de sous-additivité ou encore d'inégalité de Boole. Il est souvent peu intéressant car on a toujours la majoration :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant 1$$

2.2 Continuité croissante et décroissante

pour l'inclusion

Remarque.

- *Si* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite croissante d'événements, c'est-à-dire que pour tout* n, $A_n \subset A_{n+1}$, *alors* $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *est aussi un événement, « limite » des* A_n.
- *Si* $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite décroissante d'événements, c'est-à-dire que pour tout* n, $B_{n+1} \subset B_n$, *alors* $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$ *est aussi un événement, « limite » des* B_n.

au moins

Exemple. Sur les exemples qui suivent, identifier les suites monotones d'événements.

1. A_n : « Pile est tombé lors de l'un des n premiers lancers »
2. B_n : « sur les n premières colles, j'ai eu au moins un 13 »
3. C_n : « sur les n premières colles, j'ai toujours eu au moins 13 »

(1) $A_n \subset A_{n+1}$?

~~$A_{n+1} \subset A_n$~~ ?

"implique"

la réalisation de A_n implique la réalisation de A_{n+1}

$(A_n)_n$ est une suite croissante

(2) $(B_n)_n$ croissante

(3) $\omega \in C_{n+1} \Rightarrow \omega \in C_n$

$(C_n)_n$ décroissante.

Théorème de la continuité croissante.

> Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'événements. Alors :
>
> $$P(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

Théorème de la continuité décroissante.

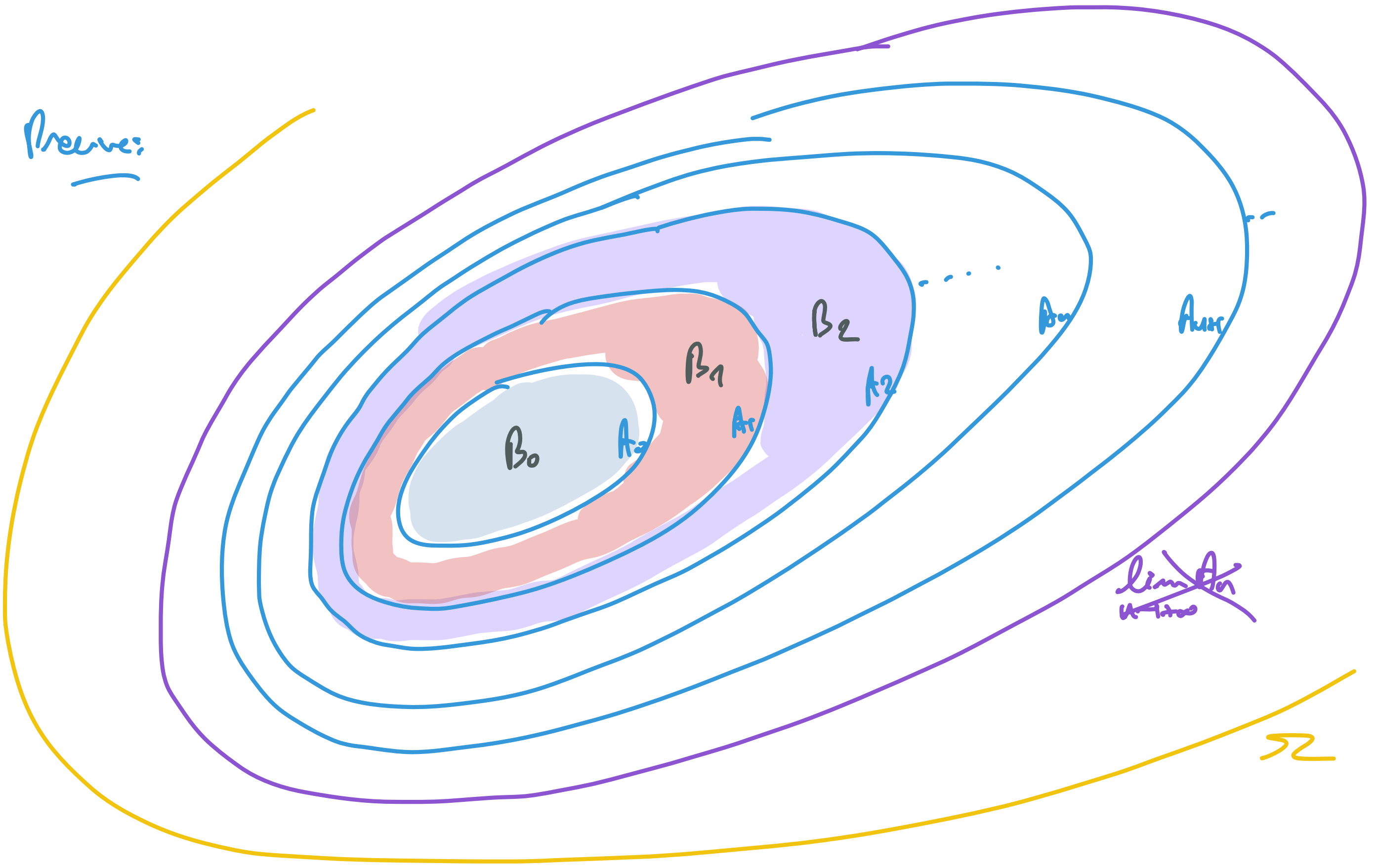
> Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'événements. Alors :
>
> $$P(B_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n\right)$$

Remarque: permet de formaliser l'idée de limite d'événements.

(par la proba).

$$\cancel{\lim_{n\to+\infty}} P(A_n) = P\left(\cancel{\lim_{n\to+\infty}} A_n\right)$$

Preuve:



Ce qui représente la "limite" des A_n est $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$

On note $B_0 = A_0$

$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad B_k = A_k \setminus A_{k-1}$

- les B_k sont deux à deux disjoints

En effet : Soit $i < j$

$B_j = A_j \setminus A_{j-1}$

et $B_i \subset A_i \subset A_{j-1}$ par croissance de $(A_n)_n$

donc $B_i \cap B_j = \emptyset$

- Par σ-additivité :

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} P(B_k)$$

- On a $\bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ "la limite"

En effet : $\boxed{\subset}$ Soit $\omega \in \bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k$

i.e. $\exists k_0$ tq $\omega \in B_{k_0}$

1er cas : $k_0 = 0$, $\omega \in B_0 = A_0 \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

2e cas : $k_0 \neq 0$ $\omega \in B_{k_0} = A_{k_0} \setminus A_{k_0 - 1}$

$\subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

$\boxed{\supset}$ Soit $\omega \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ i.e. $\exists n_0$ tq $\omega \in A_{n_0}$.

1er cas : si $n_0 = 0$, $\omega \in B_0 \subset \bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k$

2e cas : si $n_0 \neq 0$

On note $k_0 = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \omega \in A_k\}$

existe (partie non vide, minorée de $\mathbb{N}$)

Alors $\omega \in A_{k_0}$ par déf de k_0

et $\omega \notin A_{k_0-1}$ sinon $k_0 - 1 \in \{k \mid \ldots\}$

ie $\omega \in B_{k_0} \subset \bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k$.

CCl : $\bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k = \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k$

- $\sum_{k=0}^{+\infty} P(B_k)$?

Par les sommes partielles :

$$\sum_{k=0}^{n} P(B_k) = P(A_0) + \sum_{k=1}^{n} P(A_k \setminus A_{k-1})$$

$$= P(A_0) + \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - P(A_{k-1})$$

par σ-additivité avec $A_{k-1} \subset A_k$

$\left(A_k = A_{k-1} \underset{\text{disjoints}}{\cup} (A_k \setminus A_{k-1})\right)$

$$= P(A_n) \quad \text{par télescopage}$$

Donc $P(A_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$

Remarque. *Il arrive que l'on s'intéresse à une réunion non croissante (resp. à une intersection non décroissante) d'événements. On applique dans ce cas les théorèmes précédents à la suite des unions partielles (resp. intersections partielles) qui est croissante (resp. décroissante) :*

Corollaire. Soit $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque d'événements. Alors :

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{n} C_k\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} C_n\right) \quad \text{et} \quad P\left(\bigcap_{k=0}^{n} C_k\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} C_n\right)$$

$(C_n)_n$ suite d'événements.

$\left(\bigcup_{k=0}^{n} C_k\right)_n$ suite croissante d'événements

donc $P\left(\bigcup_{k=0}^{n} C_k\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{k=0}^{n} C_k\right)$

$= P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} C_k\right)$

Exemple. On lance une pièce équilibrée une infinité de fois, et on s'intéresse à l'événement :

$$A = \text{« obtenir Pile à tous les lancers »}$$

On introduit la suite des événements :

$$A_n = \text{« obtenir Pile au lancer } n \text{ »}$$

Déterminer la probabilité de l'événement A.

- $\omega_1 = PFPPFPP\dots \qquad \omega_1 \in A_1$
  $\omega_1 \notin A_2$
  $\omega_1 \notin A$

- $\omega \in A \iff \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \omega \in A_n$
  $\iff \omega \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$

  donc $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$

- $P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \prod_{k=1}^{n} P(A_k)$ par indépendance

  $= \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2}$

  $= \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} P(A)$

par continuité décroissante.

Donc $\underline{P(A) = 0}$.

$\{\omega\}$

$$\Omega = \bigcup_{\omega \in \Omega} \{\omega\}$$

union est-elle dénombrable ?

$\rightarrow$ la tribu n'est pas $\mathcal{P}(\Omega)$ en général

2.3 Négligeabilité

Définition. On dit qu'un événement A est **négligeable** lorsque $P(A) = 0$.

Remarque. *L'événement impossible est négligeable, mais un événement négligeable n'est, en général, pas impossible.*

$\emptyset$

Définition. On dit qu'un événement A est **presque sûr** lorsque $P(A) = 1$.

Remarque. *Cela équivaut à $\overline{A}$ négligeable.*

L'événement certain est presque sûr, mais un événement presque sûr n'est, en général, pas l'événement certain.

Ω

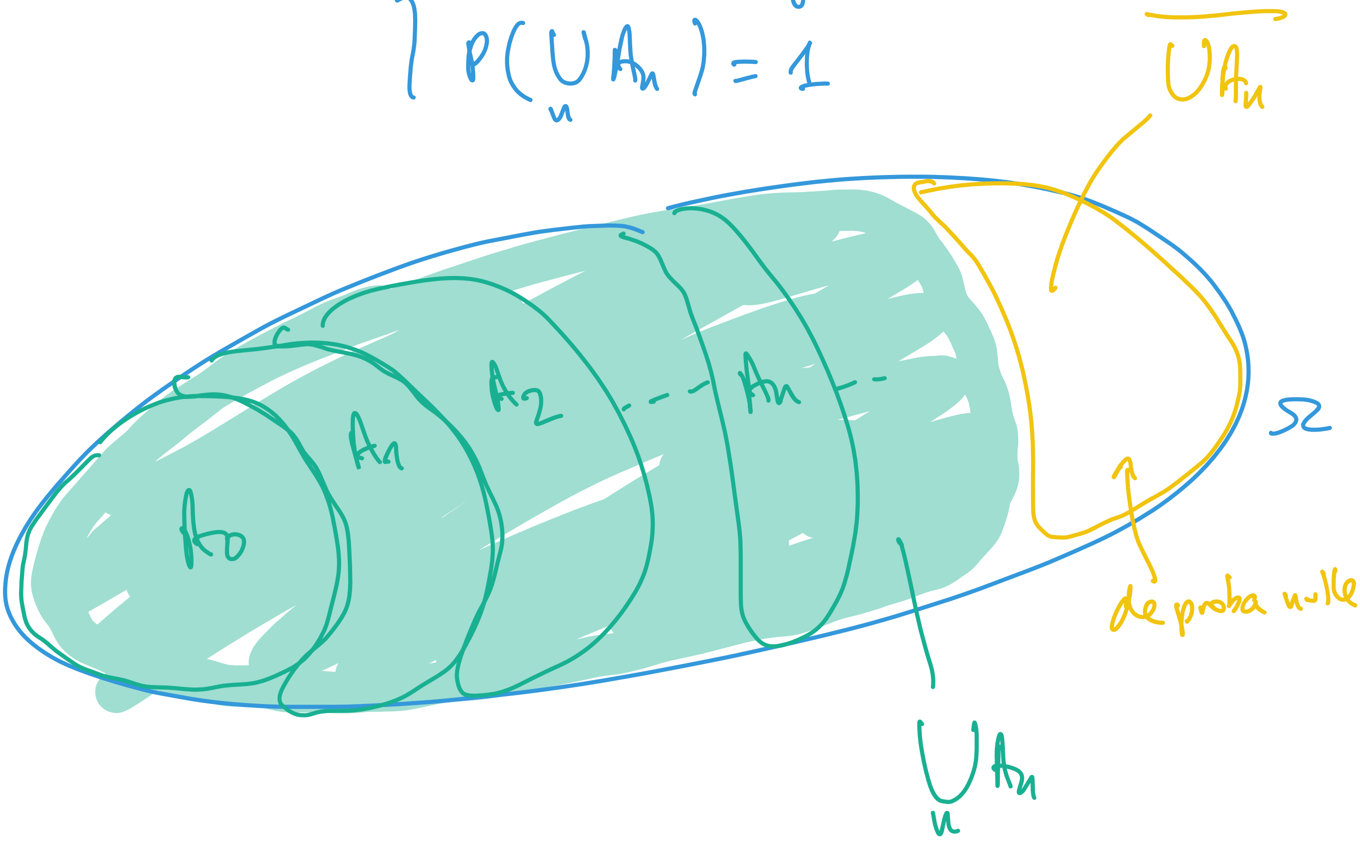
Définition. Une famille au plus dénombrable $(A_n)_{n\in N}$ d'événements est un **système quasi-complet** si les A_n sont deux à deux disjoints et leur union presque sûre, c'est-à-dire $\sum_{n\in N} P(A_n) = 1$.

$(B_n)_n$ est un syst complet d'événement

signifie : $\begin{cases} B_n \text{ 2 à 2 disjoints} \\ \bigcup_n B_n = \Omega \end{cases}$

$(A_n)_n$ est syst quasi-complet d'événements

signifie $\begin{cases} A_n \text{ 2 à 2 disjoint} \\ P\left(\bigcup_n A_n\right) = 1 \end{cases}$



3 Conditionnement

3.1 Probabilités conditionnelles

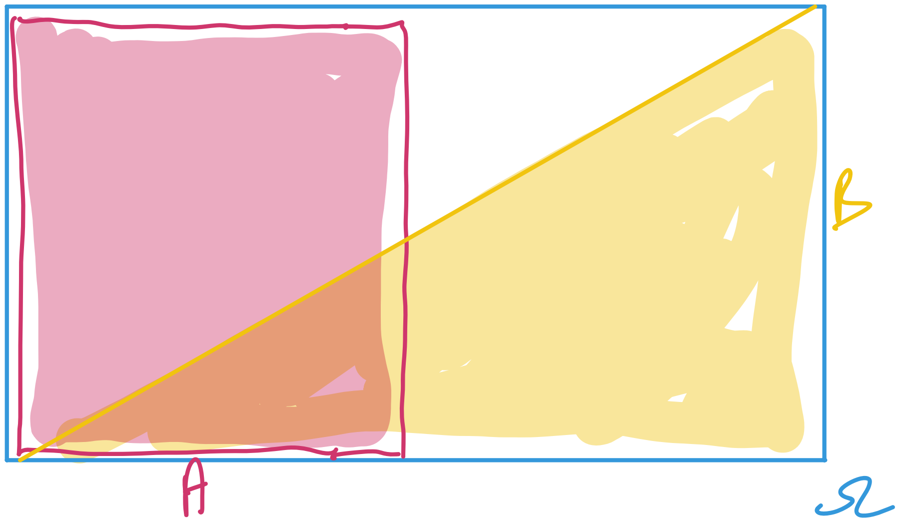
Définition. Soit B un événement tel que $P(B) > 0$.

Pour tout événement $A \in \mathscr{A}$, on définit la **probabilité conditionnelle de** A **sachant** B par :

$$P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Proposition. P_B est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

[. . .]



On a aussi $P(A \cap B) = P(A|B)\, P(B)$

3.2 Probabilités composées

Probabilités composées.

Pour deux événements A et B tels que $P(B) > 0$, on a :

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)\, P(B)$$

Plus généralement, si $A_1, \ldots, A_m$ sont des événements tels que $P\left(\bigcap_{i=1}^{m-1} A_i\right) > 0$, on a :

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^{m} A_i\right) &= P(A_m \mid A_{m-1} \cap \cdots \cap A_2 \cap A_1) \ldots P(A_3 \mid A_2 \cap A_1)\, P(A_2 \mid A_1)\, P(A_1) \\ &= \prod_{i=1}^{m} P\Big(A_i \mid \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j\Big) \end{aligned}$$

chronologie des événements

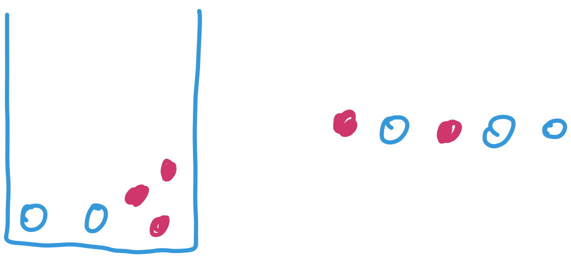
$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)\; P(A_2 \mid A_1)\; P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)$$

remontée dans le temps

$$= P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)\; P(A_2 \mid A_1)\; P(A_1)$$

Exemple. Une urne contient n boules blanches et n boules rouges. On tire successivement et sans remise n boules de cette urne. Déterminer la probabilité qu'au moins une boule rouge figure dans ce tirage.

$\omega =$



Notons : $A =$ " Au moins une boule rouge dans le tirage ".

$R_k =$ " rouge au tirage n° k "

$B_k = \overline{R_k}$

- On a $\omega \in A \iff \exists k \in \{1, \dots, n\} \quad \omega \in R_k$

$$\iff \omega \in \bigcup_{k=1}^{n} R_k$$

donc $A = \bigcup_{k=1}^{n} R_k$

- les R_k ne sont pas disjoints. $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} R_k\right) =$ pas de formule

- $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

$$= 1 - P\left(\overline{\bigcup_{k=1}^{n} R_k}\right)$$

$$= 1 - P\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{R_k}\right)$$

$$= 1 - P\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right)$$

Calculons donc $P\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right)$ par les probas composées :

$$= P(B_1)\,P(B_2 \mid B_1)\,P(B_3 \mid B_1 \cap B_2) \dots P(B_n \mid B_1 \cap \dots \cap B_{n-1})$$

Sachant $B_1 \cap \dots \cap B_k$, l'urne contient $n-k$ boules blanches et n boules rouges donc $\quad P(B_{k+1} \mid B_1 \cap \dots \cap B_k) = \dfrac{n-k}{2n-k}$

Il reste : $\quad P\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{2n-k}$

$$= \frac{n!}{2n(2n-1)\dots(n+1)}$$

$$= \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

<u>Ainsi</u> $\quad P(A) = 1 - \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$

$$= 1 - \frac{1}{\binom{2n}{n}} \qquad \text{(proche de 1)}$$

3.3 Probabilités totales

Probabilités totales.

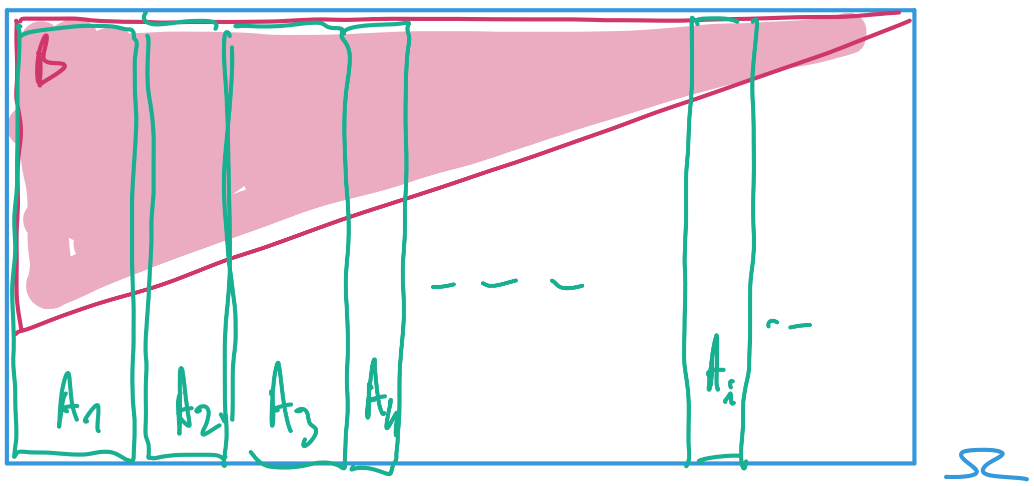
Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet ou quasi-complet d'événements, avec I fini ou dénombrable. Pour tout événement B :

$$P(B) = \sum_{i\in I} P(B\cap A_i)$$
$$= \sum_{i\in I} P(B|A_i)P(A_i)$$

Remarque.

- *On adopte la convention (raisonnable) que* $P(B|A_i)P(A_i) = 0$ *lorsque* $P(A_i) = 0$.
- *On précisera toujours le système complet ou quasi-complet d'événements utilisé pour appliquer ce théorème.*
- *Dans le cas fréquent du système complet d'événements* $\{A, \overline{A}\}$, *la formule s'écrit :*

$$P(B) = P(B\cap A) + P(B\cap \overline{A}) = P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A})$$



Si $(A_i)_i$ syst. complet d'événements, $\Omega = \bigcup_{i\in I} A_i$ disjoint

donc $B = \bigcup_{i\in I} (B\cap A_i)$ disjointe

donc par σ-additivité

$$P(B) = \sum_{i\in I} P(B\cap A_i)$$

$$= \sum_{i \in I} P(B \mid A_i)\, P(A_i)$$

Si $(A_i)_i$: système quasi complet d'événements

$$\Omega = \bigcup_{i \in I} A_i \cup C$$

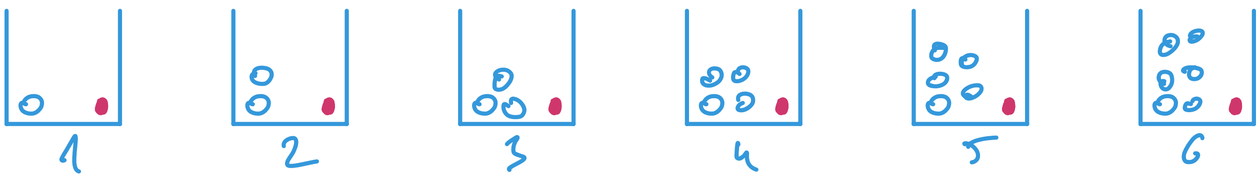
union disjointe et $P(C) = 0$

par σ-additivité

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(B \cap A_i) + \underbrace{P(B \cap C)}_{=0}$$

$$= \sum_{i \in I} P(B \mid A_i)\, P(A_i)$$

Exemple. On dispose de six urnes numérotées de 1 à 6. L'urne numéro k comporte k boules blanches et une boule rouge. Un joueur lance un dé équilibré, puis choisit une boule dans l'urne correspondant au résultat du dé. Déterminer la probabilité que la boule tirée soit blanche.



ω_1 = dé : 1, boule rouge

ω_2 = dé : 6, boule rouge

ω_3 = dé : 3, boule rouge

$$\Omega = [\![1, 6]\!] \times \{R, B\}$$

événements : R = "obtenir une boule rouge"

B = "obtenir une boule blanche" $= \bar{R}$

$\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in R$

$D_k =$ "obtenir k avec le dé"

ω_2 réalise D_6, ne réalise pas D_1.

On cherche $P(B)$.

$(D_k)_{1 \leq k \leq 6}$ est un système complet d'événements

Par la proba totale :

$$P(B) = \sum_{k=1}^{6} P(B \mid D_k)\, P(D_k)$$

Sachant D_k, on tire dans l'urne k où il y a

k boules blanches et 1 boule rouge

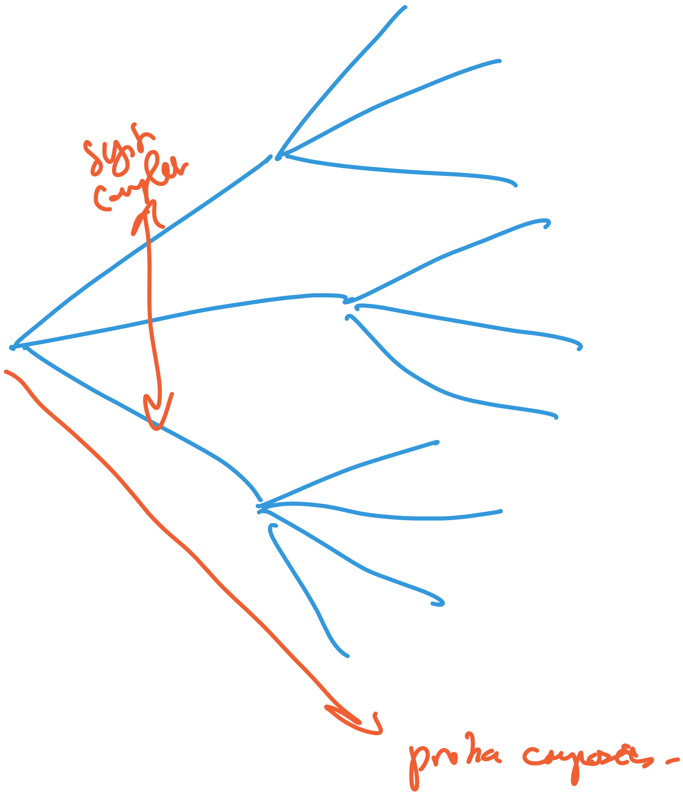
donc $P(B \mid D_k) = \dfrac{k}{k+1}$

De plus le dé est équilibré donc $P(D_k) = \dfrac{1}{6}$

$$\text{Donc} \quad P(B) = \sum_{k=1}^{6} \frac{k}{k+1} \cdot \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \dots + \frac{6}{7}\right) = [\dots]$$

Remarques arbre



3.4 Formule de Bayes

Formule de Bayes.

Soit A et B deux événements tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$. Alors :

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A})} && \text{si de plus } P(\overline{A}) \neq 0 \end{aligned}$$

Plus généralement, si $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet ou quasi-complet d'événements, avec I au plus dénombrable, alors pour tout événement B de probabilité non nulle et tout i :

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum\limits_{k \in I} P(B|A_k)P(A_k)}$$

en adoptant la convention $P(B|A_i)P(A_i) = 0$ si $P(A_i) = 0$.

Exemple.

1. On dispose d'un test de dépistage d'une maladie. En principe, celui-ci est positif si le patient est malade, mais le test n'est pas fiable à 100 %.
   Plus précisément, si le patient est malade alors le test est positif 99.9 fois sur 100.
   Mais 4 fois sur 1000 il est positif sur une personne non malade.
   On sait qu'environ 2 ‰ de la population est atteinte de la maladie.
   Quelle est la probabilité qu'une personne soit malade sachant que le test est positif ?

2. On dispose d'un second test de dépistage de la même maladie, moins bon que le premier. Mais on le teste maintenant sur la population qui s'est révelée positive au premier test.
   Si la personne est malade le test B est positif 97 fois sur 100. Mais 8 fois sur 1000 il est positif sur une personne non malade. Environ 1/3 de la population testée est atteinte de la maladie.
   Quelle est la probabilité qu'une personne testée soit malade sachant que le test B est positif ?

4 Indépendance

4.1 Indépendance de deux événements

Définition. Deux événements A et B sont dits **indépendants** si et seulement si :

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

Remarque. *Dans le cas où $P(B) > 0$, cela revient à dire $P(A \mid B) = P(A)$, c'est-à-dire que la réalisation de B n'influe pas sur la réalisation de A.*
Deux événements disjoints ne sont en général pas indépendants : la réalisation de l'un interdit la réalisation de l'autre.

Proposition. Si A et B sont indépendants, alors :

- A et $\overline{B}$ sont indépendants
- $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants

Remarque. *Le résultat s'étend au cas de n événements.*

4.2 Indépendance d'une famille finie d'événements

Définition. Soit $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ une famille finie d'événements.

- Les événements sont **deux à deux indépendants** si et seulement si, pour tout $i, j \in \{1, \ldots, m\}$:

$$i \neq j \implies P(A_i \cap A_j) = P(A_i)\, P(A_j)$$

- Les événements sont **indépendants** si et seulement si, pour toute partie (finie) $J \subset \{1, \ldots, m\}$ non vide,

$$P\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} P(A_i)$$

Remarque. *On utilise parfois l'expression « mutuellement indépendants » pour désigner l'indépendance. Des événements peuvent être deux à deux indépendants sans être indépendants.*

Exemple. On lance deux dés discernables, et on considère les événements :

$$\begin{aligned} A &= \text{« le premier dé donne un résultat pair »} \\ B &= \text{« le second dé donne un résultat pair »} \\ C &= \text{« la somme des résultats des deux dés est paire »} \end{aligned}$$

Les événements A, B et C sont deux à deux indépendants mais ne sont pas (mutuellement) indépendants.