Pour lu : DS 4h

301.8, 105.25, 105.3

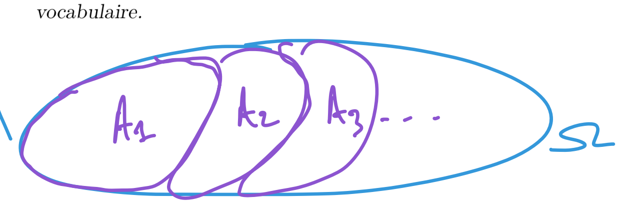
Probabilités

1 Vocabulaire probabiliste

Définition. Dans un contexte de probabilités :

- l'**univers** désigne un ensemble noté Ω, dont les éléments, notés ω, sont les **épreuves** ou **issues** ou encore **réalisations de l'expérience aléatoire**.
- un **événement** est une collection d'épreuves[1], donc une partie de Ω.
- si A est un événement, son contraire $\overline{A}$ est un événement.
- si A est un événement et ω une épreuve, on dit que ω **réalise** A lorsque $\omega \in A$.
- deux événements A et B sont **disjoints** s'ils ne peuvent être réalisés simultanément : $A \cap B = \varnothing$.
- un **système complet d'événements** est une famille $(A_i)_i$ d'événements deux à deux disjoints, et dont l'union est Ω.
- une **variable aléatoire**[2] est une application définie sur Ω, qui associe à ω un élément d'un ensemble E (en général, $E = \mathbb{R}$ ou $E = \mathbb{N}$)
  Et, pour $x \in X(\Omega)$, $(X = x) = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\}$ est l'événement qui regroupe toutes les épreuves qui « valent » x par X.

Remarque. *Deux événements disjoints sont parfois qualifiés d'**incompatibles**, mais on évitera d'utiliser ce vocabulaire.*



$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \mathbb{N}, E$$
$$\omega \longmapsto X(\omega)$$

$\Omega = \{$ individus de PSI* $\}$

$X =$ va de la taille en cm

$X(\text{gh}) = 181$

$(X = 181)$ événement qui regroupe toutes les issues (ω) tq $X(\omega) = 181$

$= X^{-1}(\{181\})$

$= X^{\leftarrow}(\{181\})$

$(X > 181)$ événement tous les ω tq $X(\omega) > 181$

Proposition. Lorsque X est à valeurs réelles, $(X \geqslant x)$ est un événement.

Pour $A \subset E$, $(X \in A)$ est un événement.

Exemple. On considère le lancer d'une pièce.

- Un univers naturel pour représenter les deux issues possibles  et  est :

$$\Omega = \{P, F\}$$

- Il y a 4 événements naturels.

$$\left.\begin{array}{l}\emptyset\\ \Omega\\ \{P\}\\ \{F\}\end{array}\right\}\ \text{les 4 événements}$$

l'ensemble de ces événements s'appelle la <u>tribu</u>

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, \{P\}, \{F\}\} \qquad\qquad \Omega$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega) \quad \underline{\text{ici}}$$

Exemple. Un joueur de loto coche 5 cases parmi les 49 proposées, plus un numéro « chance » pris entre 1 et 10. Il veut savoir s'il va gagner le gros lot.

- Un univers décrivant cette expérience est :

$$\Omega = \{\text{gagne}, \text{perd}\}$$

- Un autre univers est :

$$\Omega = \{5\text{-combinaisons de } [\![1, 49]\!]\} \times [\![1, 10]\!]$$

$\omega_1 = \{5, 9, 17, 19, 32\}, 10$

$\omega_2 = \{11, 12, 13, 14, 15\}, 5$

Exemple. Lorsque l'on joue au jeu de l'oie, on lance simultanément deux dés équilibrés à six faces.

- Un univers naturel pour représenter les issues possibles :

  ⚀⚀ ⚀⚁ ⚀⚂ ... ⚂⚅ ⚃⚀ ⚃⚁ ... ⚃⚅ ⚄⚅ ⚅⚅

  est :

$$\Omega = [\![1, 6]\!]^2$$

- « Faire un double-six » est un événement élémentaire, représenté par le singleton $\{(6, 6)\}$.
- « Faire au moins 10 » est un événement, représenté dans Ω par le sous-ensemble :

$$B = \{(4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

- Mais au jeu de l'oie, plutôt que ω, c'est le *nombre* somme des valeurs obtenues avec les deux dés qui nous intéresse. On note X la v.a. de la somme des valeurs obtenues. On a alors :

$$X\big((6, 6)\big) = 12 \text{ et } B = (X \geqslant 10)$$

$$X : \Omega \longrightarrow \cancel{\mathbb{N}}\ [\![2, 12]\!] \qquad X(\Omega) = [\![2, 12]\!]$$

$$\omega \longmapsto X(\omega)$$

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$\omega \longmapsto$$

Exemple. On s'intéresse à l'expérience suivante : on répète le lancer d'une pièce, les lancers étant considérés comme indépendants.

- Pour mieux comprendre, on peut « mimer » quelques réalisation de cette expérience aléatoire :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= FPFPPFPFFPPPFPFFP\ldots \\ \omega_2 &= FFPFFPFPPPFPFFPPPF\ldots \\ \omega_3 &= FFFFFFFFFFFFFFFF\ldots \\ \omega_4 &= PFPFPFPFPFPFPFPF\ldots \end{aligned}$$

$X(\omega_1) = 2$
$X(\omega_2) = 3$
uniquement des Faces
alternance parfaite Pile/Face
$X(\omega_3) = +\infty$

On comprend alors qu'il est naturel de choisir

$$\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}^*}$$

Cet univers est énorme (il n'est même pas dénombrable : voir § 5.2).

- On s'intéresse à des « collections d'épreuves », que l'on appelle des **événements** :

$P_3 =$ « le troisième lancer a donné Pile »

Cet événement est réalisé par ω_2 et ω_4, mais pas par ω_1 ni ω_3.

- Plus généralement, on peut noter :

$P_k =$ « le k-ième lancer a donné Pile »
$F_k =$ « le k-ième lancer a donné Face »

et faire des opérations sur ces événements pour construire de nouveaux événements :

$\omega_1 \in E_1$

$$E_1 = F_1 \cap P_2 \cap F_3,\ E_2 = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} F_k,\ E_3 = P_3 \cap F_3$$

et se demander si les épreuves précédentes réalisent ou non ces événements.

- Une façon de comprendre l'événement P_2 est d'écrire :

$$P_2 = \{\star P \star\star\star\star\star\star\ldots\} \subset \Omega$$

- On note X le rang d'apparition du premier Pile : c'est une v.a. avec $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ et :

$$X(\omega_1) = 2,\ X(\omega_2) = 3,\ X(\omega_3) = +\infty \text{ et } X(\omega_4) = 1$$

L'épreuve ω_2 réalise l'événement $(X = 3)$, et $(X = 3) = F_1 \cap F_2 \cap P_3$.

5 Annexes et compléments de cours

5.1 Annexe : ensemble fini, ensemble dénombrable

$\{1,2,4,8\}$, $\{0,3,6,9,12,15,\dots\}$ et $]0,1[$ sont trois ensembles pour lesquels on veut formaliser qu'ils n'ont pas la même « taille ».

Définition.

- Un ensemble est dit **fini** s'il peut être mis en bijection avec un ensemble de la forme $[\![1,n]\!]$.
- Un ensemble est dit **dénombrable** s'il peut être mis en bijection avec $\mathbb{N}$.

Remarque. *Cela signifie que l'on peut décrire l'ensemble en extension sous la forme $\{x_i,\ i\in[\![1,n]\!]\}$ (resp. $\{x_i,\ i\in\mathbb{N}\}$) avec des x_i distincts : on peut **numéroter** les éléments.*

Remarque. *Un ensemble est au plus dénombrable s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$, c'est-à-dire s'il peut être décrit en extension sous la forme $\{x_i,\ i\in I\}$ où $I\subset\mathbb{N}$ avec des x_i distincts.*

Exemple. $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.

Proposition.

- Une partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.
- Le produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.
- L'union au plus dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

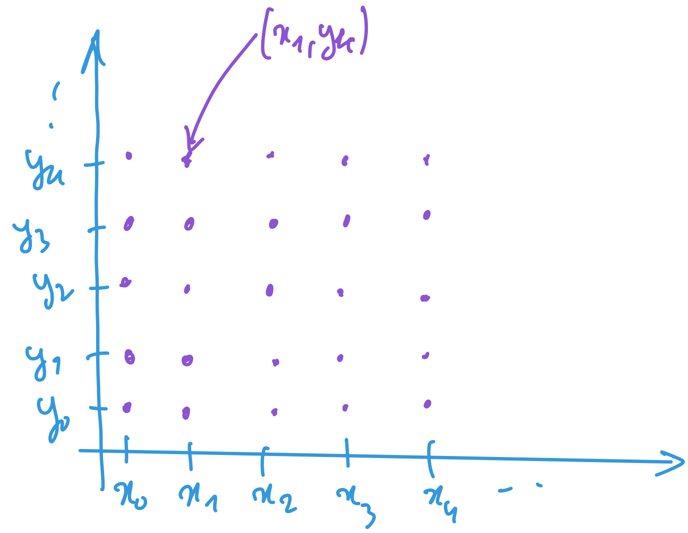
Exemple. $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mathbb{R}$ ne sont pas dénombrables.

- $\mathbb{N}$ est dénombrable
- $\mathbb{N}^*$ est dénombrable

$$\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^*$$
$$n \longmapsto n+1$$

bijection (sa réciproque est $\psi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n-1$)

- $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5 \dots\}$
  $= \{x_i ,\ i \in I \subset \mathbb{N}\}$
- E, F 2 ensembles dénombrables
  $E = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \dots\}$
  $F = \{y_0, y_1, y_2, y_3, \dots\}$
  $E \times F$

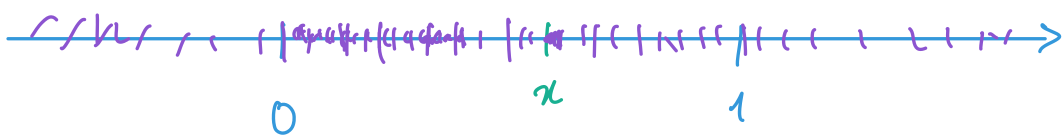


$$E\times F = \{ (x_i, y_j) \text{ où } i+j=k, \ k\in\mathbb{N}\}$$

$$= \{ (x_i, y_{k-i}) \quad 0\le i\le k \quad k\in\mathbb{N}\}$$

<u>Conséquence</u> : $\mathbb{N}^2$ dénombrable

$\mathbb{Q}$ dénombrable



$\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ non dénombrable $\qquad]0,1[,\ \mathbb{R},\ \mathcal{P}(\mathbb{N})$

↳ par l'absurde

Si $\{0,1\} = \{u_n,\ n\in\mathbb{N}\}$

$u_0 = 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0 \ldots$

$u_1 = 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0 \ldots$

$u_2 = 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0 \ldots$

$v = 0 \ 0 \ 1 \ . \ - \quad \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

$v \neq u_0 \ , \ v \neq u_1 \ , \ v \neq u_2 \ - \ -.$

Contradiction

2 Probabilité

2.1 Définition

Définition. On appelle **probabilité** sur $(\Omega, \mathscr{A})$ une application P définie sur $\mathscr{A}$ telle que :

- P est à valeurs dans $[0, 1]$
- $P(\Omega) = 1$
- Si $(A_n)_{n\in N}$ est une famille au plus dénombrable d'événements deux à deux disjoints :
$$P\left(\bigcup_{n\in N} A_n\right) = \sum_{n\in N} P(A_n) \qquad \text{(propriété de } \sigma\text{-additivité)}$$

On dit alors que $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est un **espace probabilisé**.

Remarque. *Si Ω est dénombrable, on peut écrire $\Omega = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$. Si de plus $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, alors par σ-additivité, $\sum P(\{x_n\})$ converge et sa somme vaut 1. Et si $A \subset \Omega$, A est dans $\mathscr{A}$ et $P(A) = \sum_{x\in A} P(\{x\})$: la situation est analogue à celle où Ω est fini.*

Proposition.

- $P(\varnothing) = 0$
- Si $A \in \mathscr{A}$, alors $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$
- Si $A, B \in \mathscr{A}$, alors $A \subset B \implies P(A) \leqslant P(B)$.
- Si $A, B \in \mathscr{A}$, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Proposition. La σ-additivité, sans l'hypothèse « disjointe », devient :

$$P\left(\bigcup_{n\in N} A_n\right) \leqslant \sum_{n\in N} P(A_n)$$

Remarque. *On convient que, s'il s'agit d'une famille infinie et que la série à terme général positif* $\sum P(A_n)$ *diverge, sa somme vaut* $+\infty$.

Ce résultat porte parfois le nom de sous-additivité ou encore d'inégalité de Boole. Il est souvent peu intéressant car on a toujours la majoration :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant 1$$

2.2 Continuité croissante et décroissante

Remarque.

- *Si* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite croissante d'événements, c'est-à-dire que pour tout* n, $A_n \subset A_{n+1}$, *alors* $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *est aussi un événement, « limite » des* A_n.
- *Si* $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite décroissante d'événements, c'est-à-dire que pour tout* n, $B_{n+1} \subset B_n$, *alors* $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$ *est aussi un événement, « limite » des* B_n.

Exemple. Sur les exemples qui suivent, identifier les suites monotones d'événements.

1. A_n : « Pile est tombé lors de l'un des n premiers lancers »
2. B_n : « sur les n premières colles, j'ai eu au moins un 13 »
3. C_n : « sur les n premières colles, j'ai toujours eu au moins 13 »

Théorème de la continuité croissante.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'événements. Alors :

$$P(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

Théorème de la continuité décroissante.

Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'événements. Alors :

$$P(B_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n\right)$$

Remarque. *Il arrive que l'on s'intéresse à une réunion non croissante (resp. à une intersection non décroissante) d'événements. On applique dans ce cas les théorèmes précédents à la suite des unions partielles (resp. intersections partielles) qui est croissante (resp. décroissante) :*

Corollaire. Soit $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque d'événements. Alors :

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{n} C_k\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} C_n\right) \quad \text{et} \quad P\left(\bigcap_{k=0}^{n} C_k\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} C_n\right)$$

Exemple. On lance une pièce équilibrée une infinité de fois, et on s'intéresse à l'événement :

$$A = \text{« obtenir Pile à tous les lancers »}$$

On introduit la suite des événements :

$$A_n = \text{« obtenir Pile au lancer } n \text{ »}$$

Déterminer la probabilité de l'événement A.

2.3 Négligeabilité

Définition. On dit qu'un événement A est **négligeable** lorsque $P(A) = 0$.

Remarque. *L'événement impossible est négligeable, mais un événement négligeable n'est, en général, pas impossible.*

Définition. On dit qu'un événement A est **presque sûr** lorsque $P(A) = 1$.

Remarque. *Cela équivaut à $\overline{A}$ négligeable.*

L'événement certain est presque sûr, mais un événement presque sûr n'est, en général, pas l'événement certain.

Définition. Une famille au plus dénombrable $(A_n)_{n \in N}$ d'événements est un **système quasi-complet** si les A_n sont deux à deux disjoints et leur union presque sûre, c'est-à-dire $\sum_{n \in N} P(A_n) = 1$.