Pour me : 105.1, 105.2, 105.6

2 Endomorphismes autoadjoints et matrices symétriques réelles

2.1 Endomorphismes autoadjoints

Définition. Dans E espace euclidien, on considère $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est un **endomorphisme autoadjoint** si et seulement si :

$$\forall x, y \in E, \ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$$

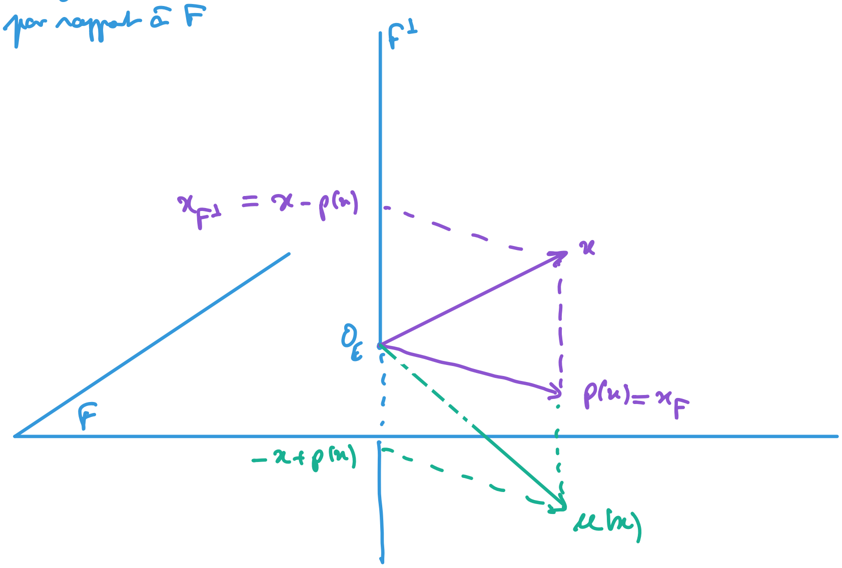
On note $\mathscr{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E.

Remarque. *On trouve aussi la terminologie « endomorphismes symétriques » pour désigner les endomorphismes autoadjoints.*

Exemple. Les symétries orthogonales, les projections orthogonales sont des endomorphismes autoadjoints.
La transposition, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique, est un endomorphisme autoadjoint.

Soit u symétrie orthogonale par rapport à F.

Mq que u est autoadjoint.



Pour $x = x_F + x_{F^\perp}$ selon $F \oplus F^\perp$, $u(x) = x_F - x_{F^\perp}$

$y = y_F + y_{F^\perp}$ " $u(y) = y_F - y_{F^\perp}$

On calcule :

$$\langle u(x), y\rangle = \langle x_F - x_{F^\perp}, y_F + y_{F^\perp}\rangle$$

$$\overset{\text{bilinéarité}}{=} \langle x_F, y_F\rangle - \underbrace{\langle x_{F^\perp}, y_F\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle x_F, y_{F^\perp}\rangle}_{=0} - \langle x_{F^\perp}, y_{F^\perp}\rangle$$

$$= \langle x_F, y_F\rangle - \langle x_{F^\perp}, y_{F^\perp}\rangle$$

cette expr est symétrique en x et y $\longrightarrow$ gagné.

$$= \langle x, u(y)\rangle \quad \text{car symétrique en } x, y$$

Donc u est autoadjoint.

Soit p projecteur orthogonal. Mq p autoadjoint

Mêmes notations avec p proj orthogonale sur F

$$\langle p(x), y\rangle = \langle x_F, y_F + y_{F^\perp}\rangle$$

$$= \langle x_F, y_F\rangle + \underbrace{\langle x_F, y_{F^\perp}\rangle}_{=0}$$

$$= \langle x_F, y_F\rangle$$

$$= \langle x_F, y_F\rangle + \overbrace{\langle x_{F^\perp}, y_F\rangle}^{=0}$$

$$= \langle x, y_F\rangle$$

$$= \langle x, p(y)\rangle$$

Théorème.

> Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, et $M = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$.
> L'endomorphisme u est autoadjoint si et seulement si M est une matrice symétrique, c'est-à-dire $M^\top = M$.

Remarque. *Il n'y a aucun résultat si on ne travaille pas dans une base orthonormée.*

"autoadjoint" traduit vectoriellement la prop matricielle "symétrique"

Preuve:

Comme $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base ON

on a $M = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} u(e_1) & \cdots & u(e_n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} & & \\ & \langle u(e_j), e_i \rangle & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \end{array}$

le coeff $[M]_{ij} = \langle u(e_j), e_i \rangle$ = coord de $u(e_j)$ selon e_i

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose u autoadjoint

$\forall i, j \quad \langle u(e_j), e_i \rangle = \langle e_j, u(e_i) \rangle$

donc $[M]_{ij} = [M]_{ji}$

donc $M = M^T$

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose $M = M^T$

Notons $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \qquad (x_i = \langle x, e_i \rangle)$

$y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$

$$\langle u(x), y\rangle = \left\langle u\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right), \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right\rangle$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i\, u(e_i), \sum_{j=1}^{n} y_j\, e_j \right\rangle$$

on développe par bilinéarité

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \underbrace{\langle u(e_i), e_j\rangle}_{[M]_{ji} \,=\, [M]_{ij}}$$

par hyp

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle e_i, u(e_j)\rangle$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, u\left(\sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) \right\rangle$$

$$= \langle x, u(y)\rangle$$

__Remarque:__ $\mathcal{B} = (e_1 \dots e_n)$ base ON

u autoadjoint, $M = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$

$x, y \in E$ X, Y mat. colonne de x, y dans $\mathcal{B}$

en base ON

$$\langle u(x), y\rangle = \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u(x))\right)^T \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)\right)$$

$$= (MX)^T Y$$

$$= X^T M^T Y = X^T M Y$$

2.2 Réduction des endomorphismes symétriques

Proposition.

- Soit M une matrice symétrique réelle. Alors χ_M est scindé sur $\mathbb{R}$.
- Soit u un endomorphisme autoadjoint. Alors χ_u est scindé sur $\mathbb{R}$.

Preuve : Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$

χ_M est scindé sur $\mathbb{C}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une vp de M (vue comme dans $M_n(\mathbb{C})$)

donc $\exists Z \in M_{n1}(\mathbb{C})$ tq $MZ = \lambda Z$ $\quad Z \neq 0$

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$\langle u(z), z \rangle = Z^T M Z = Z^T \lambda Z = \lambda Z^T Z$$

$$= \lambda \underbrace{(z_1^2 + \dots + z_n^2)}_{\text{Pff...}}$$

$$\bar{Z}^T M Z = \bar{Z}^T \lambda Z = \lambda \bar{Z}^T Z$$

$$= \lambda (\bar{z}_1 z_1 + \dots + \bar{z}_n z_n)$$

$$= \lambda \underbrace{(|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2)}_{>0 \text{ car } Z \neq 0}$$

$\bar{Z}^T M Z = \bar{Z}^T \bar{M}^T Z$ car M symétrielle

$= \overline{(MZ)}^T Z$

$= \overline{(\lambda Z)}^T Z = \bar{\lambda} (|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2)$

donc $\lambda = \bar{\lambda}$: λ est bien réel.

Donc χ_M est scindé sur $\mathbb{R}$.

Si u est autoadjoint, on note $\mathcal{B}$ base ON de E

et $M = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$

Alors $M \in S_n(\mathbb{R})$ et $\chi_u = \chi_M$ scindé sur $\mathbb{R}$.

Proposition. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme autoadjoint de E et F un sous-espace vectoriel de E. Si F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u.

Preuve: On suppose u autoadjoint

F stable par u

Mq $F^\perp$ est stable par u :

Soit $x \in F^\perp$ Mq $u(x) \in F^\perp$

Soit $y \in F$ $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$ u autoadjoint

$= 0$ car $x \in F^\perp$
$u(y) \in F$

Proposition. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme autoadjoint de E. Alors ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux, et sont donc en somme directe orthogonale.

Pour u autoadjoint, on peut écrire $\underset{\lambda \in Sp(u)}{\bigoplus^{\perp}} E_\lambda(u)$

pour désigner $\sum_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$ avec l'indication suppl.

qu'ils sont en somme directe et orthogonaux.

Preuve:

Soit λ, μ deux vp distinctes de u autoadjoint.

$x \in E_\lambda(u)$, $y \in E_\mu(u)$

Mq $\langle x, y \rangle = 0$

$$\langle u(x), y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$
$$\parallel$$
$$\langle x, u(y) \rangle = \langle x, \mu y \rangle = \mu \langle x, y \rangle$$

donc $(\lambda - \mu) \langle x, y \rangle = 0$ où $\lambda \neq \mu$

donc $\langle x, y \rangle = 0$

Théorème spectral.

Tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien admet une base orthonormée de vecteurs propres.

Remarque. *Il s'agit bien d'un théorème de diagonalisabilité : Si u un endomorphisme autoadjoint de E espace euclidien, alors :*

- *E est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u.*
- *u est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.*

Preuve : Soit u autoadjoint.

χ_u est scindé sur $\mathbb{R}$, on note $Sp(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$

On considère $F = \overset{\perp}{\bigoplus_{k=1}} E_{\lambda_k}(u)$

Mq $F = E$

Si $F \subsetneq E$, $F^\perp \neq \{0_E\}$

Or F stable par u donc $F^\perp$ stable par u

et l'endomorphisme induit $u_{F^\perp}$ est autoadjoint

donc admet au moins une vp ($\chi_{u_{F^\perp}}$ scindé)

donc $\exists x \in F^\perp$ vecteur propre de $u_{F^\perp}$ donc de u

Mais $x \in F$ en tant que vecteur propre

donc $x = 0$, absurde.

Donc $F = E$.

En considérant la concaténation de bases ON de chaque $E_{\lambda_k}(u)$, on a une base ON de vecteurs propres de u.

Corollaire. Pour toute matrice symétrique réelle A, il existe une matrice diagonale réelle D et une matrice orthogonale P telles que :

$$A = PDP^{-1} = PDP^{\top}$$

Remarque. *On note l'intérêt d'avoir une matrice de passage orthogonale :* $P^{-1} = P^{\top}$.

Remarque: Attention !

On peut diagonaliser A avec une matrice P qui n'est pas orthogonale !

Le th dit qu'on peut trouver une matrice de passage orthogonale.

Preuve: Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

$u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associé

$\mathcal{B} = (e_1 \dots e_n)$ base canonique ON de $\mathbb{R}^n$.

Alors u est autoadjoint

Donc $\exists\, \mathcal{C} = (f_1 \dots f_n)$ base ON de vecteurs propres de u

On note $D = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{C})$ diagonale

$P = \mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ matrice de passage

On a $A = PDP^{-1}$

Ici $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$ sont ON donc $P \in O_n(\mathbb{R})$

et $A = PDP^{\top}$

2.3 Endomorphismes autoadjoints positifs ou définis-positifs

Définition. Soit $u \in \mathscr{S}(E)$ un endomorphisme autoadjoint.

- On dit que u est **positif** si et seulement si $\forall x \in E$:

$$\langle u(x), x \rangle \geqslant 0$$

- On dit que u est **défini-positif** si et seulement si u est positif et :

$$\langle u(x), x \rangle = 0 \implies x = 0$$

On note $\mathscr{S}^{+}(E)$ (resp. $\mathscr{S}^{++}(E)$) l'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs (resp. définis-positifs).

Remarque. *On peut aussi traduire que $u \in \mathscr{S}(E)$ est défini-positif par :*

$$\forall x \in E,\ x \neq 0 \implies \langle u(x), x \rangle > 0$$

Remarque : Si $u \in \mathscr{S}^{++}(E)$

$\varphi : (x, y) \longmapsto \langle u(x), y \rangle$ définit un produit scalaire.

Définition. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle.

- On dit que S est **positive** si et seulement si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$X^\top S X \geqslant 0$$

- On dit que S est **définie-positive** si et seulement si elle est positive et :

$$\forall X \ X^\top S X \geqslant 0 \text{ et } \quad X^\top S X = 0 \implies X = 0$$

On note $\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques positives (resp. définies-positives).

Remarque. *On ne parle de positivité que pour les endomorphismes autoadjoints (resp. pour les matrices symétriques réelles).*

Remarque. *Si $u \in \mathscr{S}^{++}(E)$, $\langle u(x), y \rangle$ définit un produit scalaire sur E.*
Si $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $X^\top M Y$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Caractérisation spectrale.

> Soit $u \in \mathscr{S}(E)$.
>
> - u est positif si et seulement si $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$;
> - u est défini-positif si et seulement si $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$.
>
> Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
>
> - S est positive si et seulement si $\mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+$;
> - S est définie-positive si et seulement si $\mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Preuve:

Travaillons matriciellement. Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$

Mq $S \in S_n^+(\mathbb{R}) \iff Sp(S) \subset \mathbb{R}_+$

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad X^T S X \geqslant 0$

Soit $\lambda \in Sp(S)$, Soit $X \neq 0$ vecteur propre associé.

$0 \leq X^T S X = X^T \lambda X = \lambda \underbrace{\|X\|^2}_{>0}$

Donc $\lambda \geqslant 0$

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose $Sp(S) \subset \mathbb{R}_+$

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Mq $X^T S X \geqslant 0$

Par le th spectral $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ tq

$$S = P D P^T$$

où $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$ où $\lambda_k \geqslant 0 \ \forall k$

$$\left(\quad
\begin{tikzcd}
 & \overset{\langle u(x),x\rangle}{u}\quad x \arrow[dl, leftrightarrow, "\mathcal{B}"'] \arrow[dr, leftrightarrow, "\mathcal{C}"] & \\
\underset{X^TSX}{S \quad X} & & \underset{X'^TDX'}{X' \quad D}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{array}{l} S = PDP^T \\ X = PX' \end{array}
\quad\right)$$

$$X^TSX = X^T P D P^T X$$
$$= (P^TX)^T D (P^TX)$$
$$= (X')^T D X' \qquad \text{où on pose } X' = P^TX$$
$$= (x_1' \ \dots \ x_n') \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$
$$= \lambda_1 x_1'^2 + \dots + \lambda_n x_n'^2$$
$$\geq 0 \qquad \text{car } \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$$

Soit $S \in S_n^+(\mathbb{R})$

Mq $S \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \iff Sp(S) \subset \mathbb{R}_+^*$

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit X tq $SX = 0$

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ $X^TSX \geq 0$

Soit $\lambda \in Sp(S)$, Soit $X \neq 0$ vecteur propre associé.

$0 \leq X^TSX = X^T\lambda X = \lambda \underbrace{\|X\|^2}_{>0}$

Donc $\lambda \geq 0$

Alors $X^TSX = X^T 0 . X = 0$

donc $X=0$ car $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

donc 0 n'est pas vp de S

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose $Sp(S) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tq $X^T S X = 0$

Avec les notations précédentes

$0 = X^T S X = \lambda_1 x_1'^2 + \dots + \lambda_n x_n'^2$

Somme nulle de termes positifs

donc $\forall k \quad \lambda_k x_k'^2 = 0$

or $\lambda_k \neq 0$ donc $\forall k \quad x_k'^2 = 0$

donc $X' = 0$

donc $X = PX' = 0$

Remarque:

$\langle u(x), x \rangle$ où $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

$= \langle \sum_{i=1}^n x_i u(e_i), \sum_{j=1}^n x_j e_j \rangle$

$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \langle u(e_i), e_j \rangle$

Cas où $(e_1 \dots e_n)$ base ON de vecteurs propres deux

associés aux valeurs propres $\lambda_1 \dots \lambda_n$

$$\langle u(x), x \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \, u(e_i) \, , \, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right\rangle$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i e_i \, , \, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \lambda_i x_j \underbrace{\langle e_i , e_j \rangle}_{\delta_{ij}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$