Pour re : DS 3b 2024

Pour ma : 207.12, 207.17, 207.25

Déf réflexion = symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan

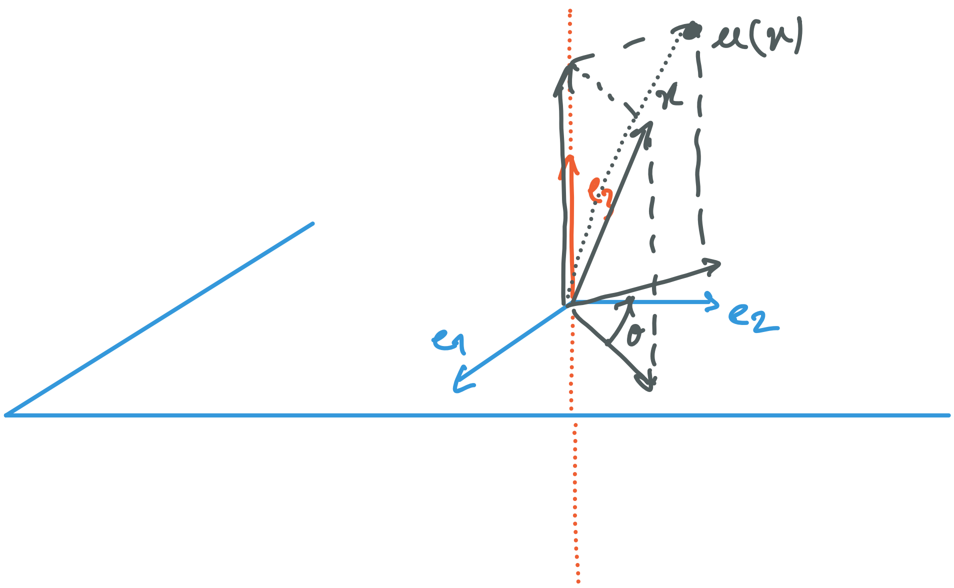
1.5 Isométries d'un espace euclidien de dimension 3

Dans ce paragraphe, on travaille dans un espace euclidien E_3 de dimension 3.

Proposition. Si $u \in \mathrm{SO}(E_3)$, alors il existe une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E_3 et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que, par blocs :

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} R_\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

u s'appelle la **rotation vectorielle d'axe dirigé et orienté par e_3, et d'angle θ.**



Soit $u \in SO(E_3)$

- $\chi_u(X) = \det(X\,Id - u)$
$$= X^3 - \mathrm{tr}(u) X^2 + \dots - \det(u)$$

$\chi_u(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$

$\chi_u(0) = -\det(u) = -1$

Donc χ_u s'annule sur $[0, +\infty[$ par le th des V.I.

Donc u admet une vp réelle positive.

Or $Sp_{\mathbb{R}}(u) \subset \{-1, 1\}$

Donc 1 est vp de u.

On choisit $\underset{\neq 0}{e_3} \in E_1(u)$ unitaire (quitte à diviser par sa norme)

- $D = Vect(e_3)$ est stable par u

Donc $\underbrace{D^{\perp}}_{\text{noté } P}$ est stable par u car $u \in O(E_3)$

On s'intéresse à l'endomorphisme induit par u sur P

$$u_P : \begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & \cancel{E}\; P \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}$$

Soit (e_1, e_2) base ON de P tq (e_1, e_2, e_3) directe

on oriente P avec (e_1, e_2)

$$Mat(u, \mathcal{B}) = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{M}} & 0 \\ & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

avec $M = Mat(u_P, (e_1, e_2))$

$*$ $M \in O_2(\mathbb{R})$ car $\|u_P(x)\| = \|u(x)\|$

$= \|x\| \quad \forall x$

donc $u_P \in O(P)$ et (e_1, e_2) base ON.

$\star$ $M \in SO_2(\mathbb{R})$ car $\underset{\underset{1}{\shortparallel}}{\det(u)} = \det M \times 1$ par blocs

Donc $\exists \theta$ tq $M = R_\theta$

On a montré qu'il existe $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ tq

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \left(\begin{array}{cc|c} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Détermination pratique de l'axe et de l'angle d'une rotation.

Soit $u \in \mathrm{SO}(E_3)$.

1. On vérifie que $u \in \mathrm{O}(E_3)$. — on vérifie que les colonnes forment une base ON de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$
2. On vérifie que $u \in \mathrm{SO}(E_3)$. det
3. On détermine l'axe de la rotation en déterminant $\mathrm{Inv}(u) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$. $= E_1(u)$
   On choisit e_3 unitaire qui **dirige et oriente** cet axe.
4. L'angle θ de la rotation peut être déterminé **au signe près** en remarquant que :

$$\mathrm{tr}\, u = 2\cos\theta + 1$$

5. Le signe de θ est déterminé en prenant e_1 unitaire et orthogonal à e_3, et en remarquant que :

$$\sin\theta = \langle e_3 \wedge e_1, u(e_1)\rangle = [e_3, e_1, u(e_1)]$$

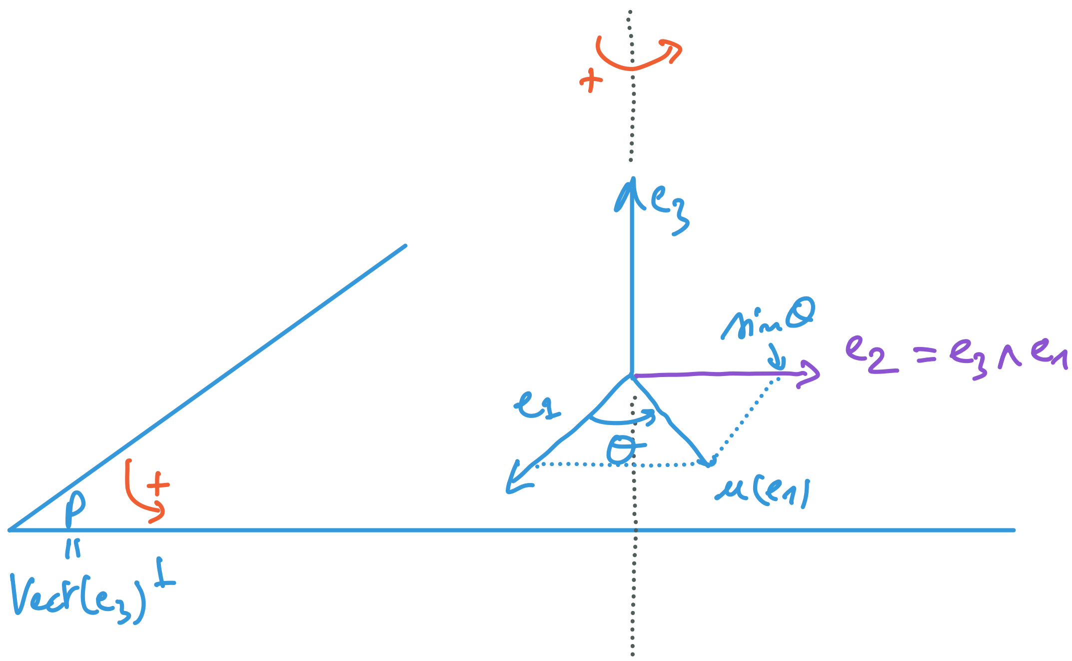
(4)

$$\mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)\right) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 2\cos\theta + 1$$

$\longrightarrow$ θ au signe près si $\theta \neq \pi$

(5)



On choisit e_1 unitaire, orthogonal à e_3

On pose $e_2 = e_3 \wedge e_1$

On calcule $u(e_1)$

On a $\langle u(e_1) \mid e_1 \rangle = \overbrace{\|u(e_1)\|}^{1}\ \overbrace{\|e_1\|}^{1} \cos\theta$

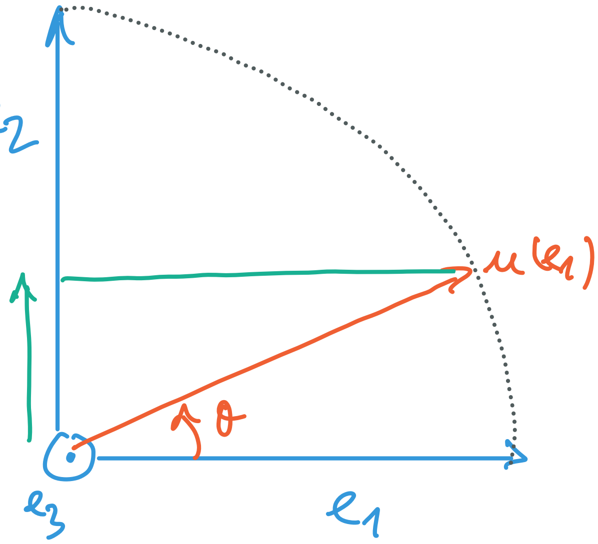
$= \cos\theta$

$$\sin\theta = \langle u(e_1), e_2 \rangle$$

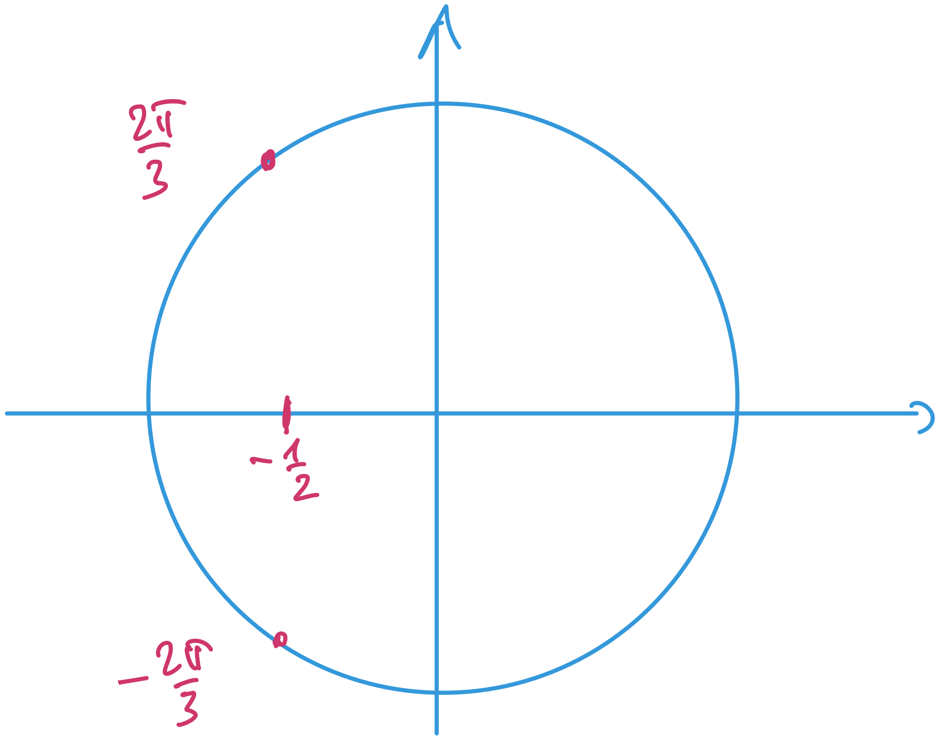
$$= \langle e_3 \wedge e_1 , u(e_1) \rangle$$

$$= [e_3, e_1, u(e_1)]$$

$$x = \langle x, e_1 \rangle e_1 + \langle x, e_2 \rangle e_2$$



$$\langle e_2, u(e_1) \rangle = \sin\theta$$



Exemple. Reconnaître les endomorphismes canoniquement associés à :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

rendre les colonnes unitaires
→ matrice orthogonale

A : On note u canoniquement associé à A.

- On note C_1, C_2, C_3 les colonnes de A.

$$\langle C_1, C_2 \rangle = \frac{1}{9}(4-2-2) = 0$$

$$\langle C_2, C_3 \rangle = \frac{1}{9}(2-4+2) = 0$$

$$\langle C_1, C_3 \rangle = \frac{1}{9}(2+2-4) = 0$$

$$\langle C_1, C_1 \rangle = \langle C_2, C_2 \rangle = \langle C_3, C_3 \rangle = \frac{1}{9}(4+4+1) = 1$$

Donc $A \in O_3(\mathbb{R})$ donc $u \in O(\mathbb{R}^3)$

- Est-ce une isométrie vectorielle directe ?

$$\det A = \frac{1}{27}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= [\dots] = 1$$ donc $A \in SO_3(\mathbb{R})$

M2 Les colonnes de A forment une base ON de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

A directe $\iff (C_1, C_2, C_3)$ directe

$\iff C_3 = C_1 \wedge C_2$

Comme $A \in O_3(\mathbb{R})$, on a :

$$C_1 \wedge C_2 = \pm C_3$$

on veut savoir si c'est + ou −

$$C_1 \wedge C_2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} * \\ * \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$C_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

donc c'est $+$ donc $A \in SO_3(\mathbb{R})$

Ainsi u est une rotation vectorielle.

- On cherche $E_1(u)$

$$E_1(u) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

(Attention au $\frac{1}{3}$!)

$3C_1 + C_2 + C_3 = 0$

$rg \geq 2$ car C_1, C_2 non col.

$$= \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On pose $e_3 = \frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

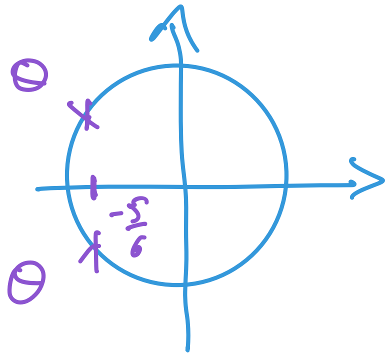
Ainsi : u est la rotation d'axe dirigé et orienté par e_3 et d'angle θ à déterminer.

- $\operatorname{tr}(A) = 2\cos\theta + 1$ ne pas oublier $\frac{1}{3}$

$$\underset{\displaystyle -\frac{2}{3}}{\underset{\shortparallel}{\operatorname{tr}(A)}} = 2\cos\theta + 1$$

donc $\cos\theta = -\frac{5}{6}$

ie $\theta = \pm \operatorname{Arccos}\left(-\frac{5}{6}\right)$

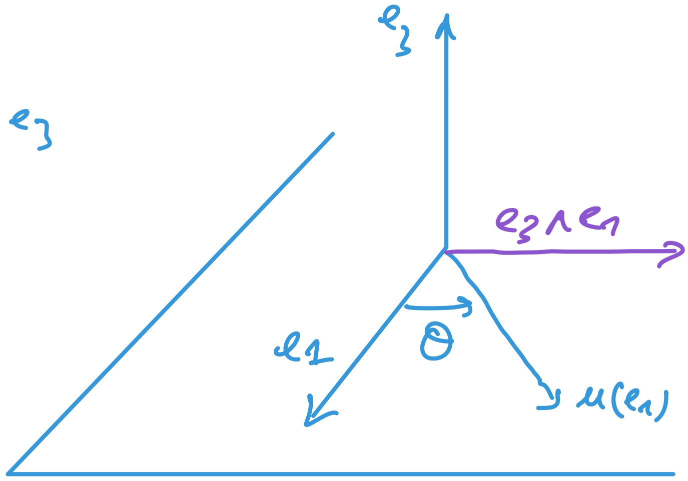


$e_3 = \frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- On cherche le signe de θ.

Posons $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

unitaire, orthog à e_3



On calcule $(-C_2 + C_1)$

$$u(e_1) = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On a $\sin\theta = \langle u(e_1), e_3 \wedge e_1 \rangle$

$= [e_3, e_1, u(e_1)]$

$$= \begin{vmatrix} \frac{3}{\sqrt{11}} & 0 & \frac{-1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{3\sqrt{2}} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{6\sqrt{11}} \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 + L_3$

$$= \frac{1}{6\sqrt{11}} \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

dév C_2

$$= \frac{1}{6\sqrt{11}} (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$< 0$$

Donc $\theta = -\operatorname{Arccos}\left(-\frac{5}{6}\right)$

$B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ On note C_1, C_2, C_3 les colonnes

- B est orthogonale [...]
- $C_1 \wedge C_2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 \\ * \\ * \end{pmatrix} = +C_3$

donc $B \in SO_3(\mathbb{R})$

• Recherche de $E_1(B) = \mathrm{Ker}(B - I_3)$

$$= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -5 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \qquad 2C_2 - C_3 = C_1$$

$$= \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On pose $e_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

• u est la rotation d'axe dirigé et orienté par e_3 d'angle θ à déterminer.

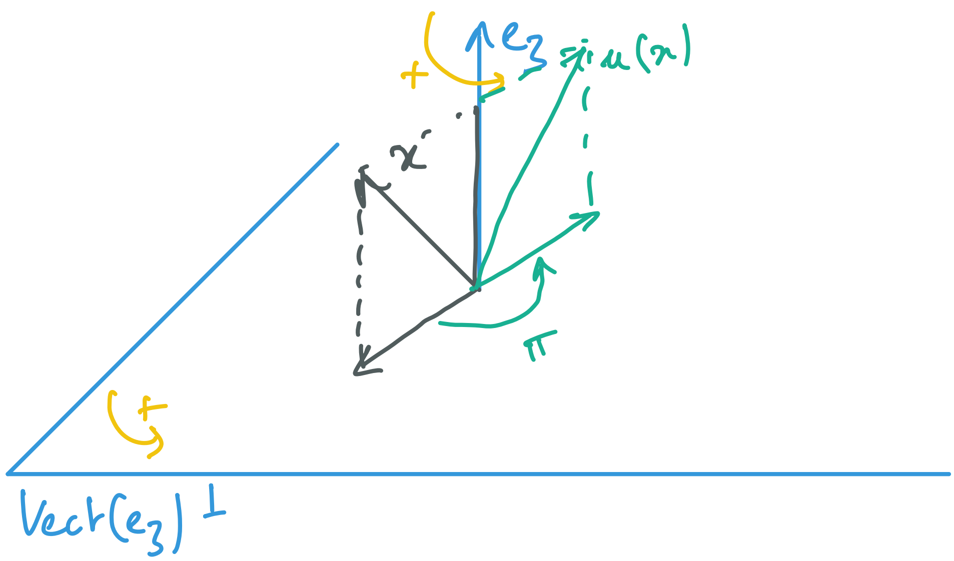
• $2\cos\theta + 1 = \mathrm{tr}\, B$

$$= -1$$

donc $\cos\theta = -1$

ie $\theta = \pi$

(pas de signe du sin)



u est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}(e_3)$

Remarque:

B est symétrique

or B est orthogonale donc $B^T B = I_3$

car B symétrique $\quad B^T B = B^2$

donc B est la matrice d'une sym. vectorielle

(B sym réelle, donc diagonalisable (dans $\mathbb{R}$)

donc χ_B est scindé dans $\mathbb{R}$

donc $R_\theta = R_0$ ou R_π

car R_θ n'a pas de vp réelle si

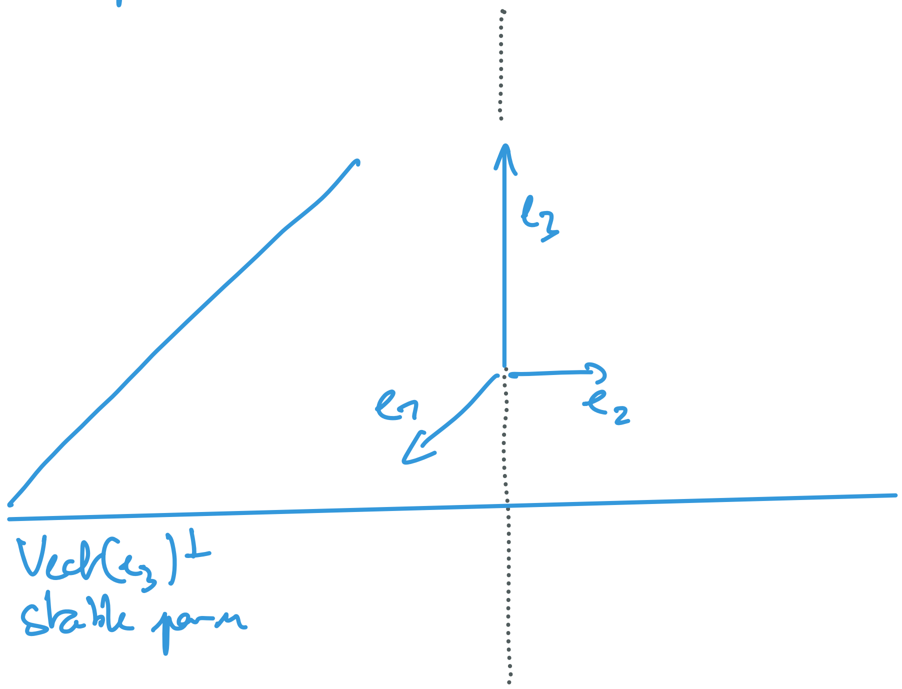
$\theta \neq 0 \ (\pi)$)

Remarque. *Si $u \in \mathrm{O}(E_3) \setminus \mathrm{SO}(E_3)$, on peut montrer que dans une base orthonormée directe bien choisie, la matrice de u est de la forme (par blocs)* $\begin{pmatrix} R_\theta & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *$u$ est donc la composée commutative d'une rotation d'axe $\mathrm{Vect}(e_3)$ et d'une réflexion de plan $\mathrm{Vect}(e_3)^\perp$.*
On peut aussi donner un théorème de classification des isométries vectorielles, basée sur la dimension de $\mathrm{Inv}(u)$.

Principe : reprendre l'étude précédente $\chi_u(t)$

$\longrightarrow$ -1 est vp $\qquad \chi_u(0) = +1$

prendre e_3 vecteur propre unitaire associé.



$$\mathrm{Mat} = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{M} & 0 \\ & & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$M \in SO_2(\mathbb{R})$