Pour j : 207.11

$u \in O(E) \iff \forall x \quad \|u(x)\| = \|x\|$

$\iff$ u préserve le produit scalaire

$\iff$ u envoie base ON sur base ON

$M \in O_n(\mathbb{R}) \iff$ M est la matrice d'une isom. vecto en base ON

Proposition. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Sont équivalentes :

(*i*) M est une matrice orthogonale ;

(*ii*) $M^\top M = I_n$;

(*iii*) M est inversible et $M^{-1} = M^\top$;

(*iv*) $MM^\top = I_n$;

(*v*) Les colonnes de M forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$;

~~(*vi*) Les lignes de M forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.~~

Remarque. *En pratique, c'est le point (v) qui est le plus simple à rédiger.*

*Attention au vocabulaire : une matrice ortho**gonale** est une matrice dont les colonnes forment une base ortho**normée**.*

$\forall i,j \quad \langle C_i , C_j \rangle = \delta_{ij}$

$\langle C_i , C_j \rangle = C_i^\top C_j$

coeff i,j de $M^\top M$

Corollaire. Un endomorphisme de E est une isométrie vectorielle si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée est orthogonale.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ base ON de E $\qquad \mathcal{B} = (e_1 \ldots e_n)$

$$\mathrm{Mat}(u,\mathcal{B}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u(e_1) & \cdots & u(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array}$$

$u \in O(E) \iff (u(e_1) \ldots u(e_n))$ base ON de E

$\iff$ les colonnes de M base ON de $M_{n,1}(\mathbb{R})$

$\iff M \in O_n(\mathbb{R})$

Proposition. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et $\mathcal{B}'$ une famille à n vecteurs de E. Soit $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$. Alors $\mathcal{B}'$ est une base orthonormée si et seulement si P est une matrice orthogonale.

Corollaire. Les matrices orthogonales sont les matrices de changement de bases orthonormées.

$\mathcal{B} = (e_1 \dots e_n)$ $\qquad$ $\mathcal{B}' = (f_1 \dots f_n)$

$$P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_1 \dots f_n) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f_1 & \dots & f_n \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \end{array}$$

P orthogonale $\iff$ les colonnes forment base ON de $M_{n1}(\mathbb{R})$

$\iff (f_1 \dots f_n)$ base ON de E

Rmq. Chouette !

Lors d'un changement de base ON, avec P la matrice de passage, $P^{-1} = P^T$

La formule de changement de base ON est :

$$A = P A' P^T$$

$$X = P X'$$

Définition. On note $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, ou parfois $\mathrm{O}(n)$, l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Muni de la loi $\times$, c'est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, appelé **groupe orthogonal d'ordre** n.

Proposition. Soit $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Alors $\det M = \pm 1$.

Définition. On note :

$$\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \text{ t.q. } \det M = +1\}$$

C'est un sous-groupe de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ appelé **groupe spécial orthogonal**. On trouve aussi la notation $\mathrm{SO}(n)$ ou $\mathrm{O}_n^+(\mathbb{R})$

Remarque. *Si $u \in \mathrm{O}(E)$, alors $\det u = \pm 1$. On peut définir de même :*

$$\mathrm{SO}(E) = \{u \in \mathrm{O}(E) \text{ t.q. } \det u = +1\}$$

Ses éléments s'appellent les ***isométries vectorielles directes*** *(ou positives), tandis que celles de déterminant -1 sont qualifiées d'****indirectes*** *(ou négatives).*

Soit $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ ie $M^T M = I_n$

donc $\det(M^T M) = \det(I_n) = 1$

$$\det(M^T M) = \det(M^T)\det(M) = \det(M)^2$$

donc $\det(M) = \pm 1$.

2 types de matrices orthogonales : $\det M = +1$ $\det M = -1$.

Les matrices orthogonales directes (ou positives) sont celles de det 1

" indirectes det -1

Par dénotation pour les matrices indirectes

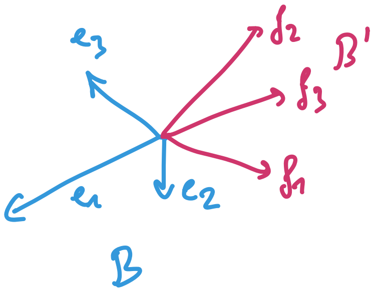
$$\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$$

1.3 Espace euclidien orienté de dimension 2 ou 3

Dans ce paragraphe, on travaille dans un espace euclidien de dimension 2 ou 3.

1.3.1 Orientation

Définition. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. On dit que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ définissent **la même orientation** si et seulement si $\det P > 0$.



$$P = \mathrm{Pass}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}') = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f_1 & f_2 & f_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$

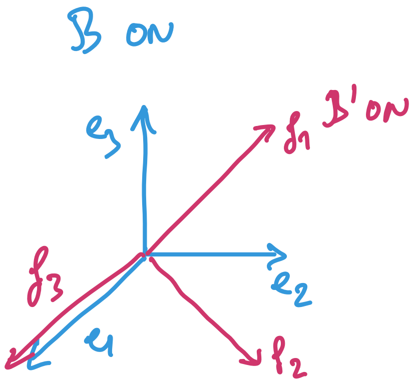
$\det P \neq 0$

donc $\det P > 0$ ou $\det P < 0$

Proposition. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormées de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ définissent **la même orientation** si et seulement si $P \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Remarque. *Deux bases orthonormées $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ définissent la même orientation si et seulement si :*

$$\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}'}$$



$P = \mathrm{Pass}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}') \in O_n(\mathbb{R})$

Si $\det P = +1$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ définissent la même orientation

Si $\det P = -1$ $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont d'orientation opposées.

Rmq: Soit $P = \mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$

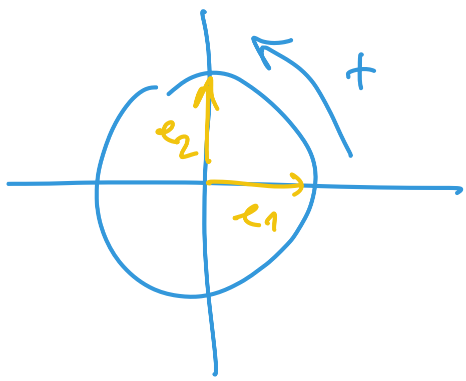
$\forall (x_1 \dots x_n) \in E^n$

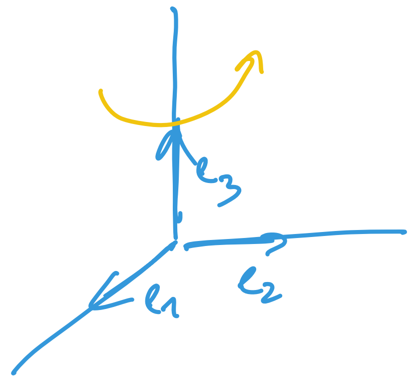
$$\det_{\mathcal{B}}(x_1 \dots x_n) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \times \det_{\mathcal{B}'}(x_1 \dots x_n)$$

$$= \underbrace{\det(P)}_{1} \times \det_{\mathcal{B}'}(x_1 \dots x_n)$$

Ainsi le déterminant d'une famille de vecteurs ne dépend pas du choix de la base ON qui définit la même orientation.

Définition. **Orienter** l'espace, c'est choisir une base $\mathcal{B}$ et l'appeler **directe**. Les bases définissant la même orientation que $\mathcal{B}$ sont aussi appelées **directes**, les autres **indirectes**.
En dimension 2 et 3, les bases canoniques sont choisies pour être directes (sens trigonométrique, règle de la main droite).





1.3.2 Produit mixte

Définition. On appelle **produit mixte** d'une famille de 2 vecteurs (resp. 3 vecteurs) d'un espace euclidien orienté de dimension 2 (resp. 3) le déterminant de cette famille dans une base orthonormée directe.
On note $[u, v]$ (resp. $[u, v, w]$) ce produit mixte.

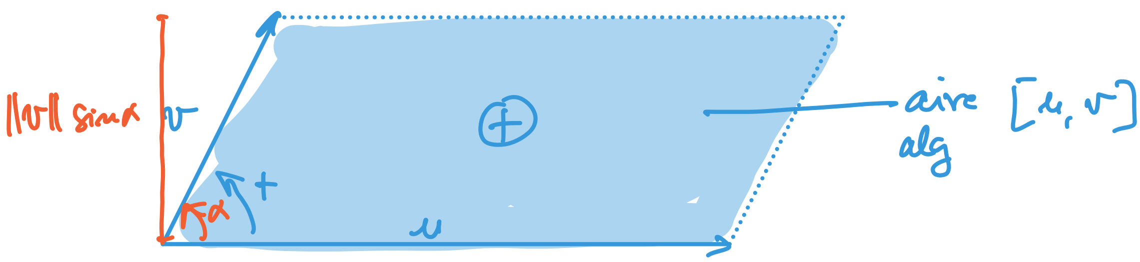
E euclidien orienté

$$[u, v] = \det_{\mathcal{B}}(u, v)$$ où $\mathcal{B}$ est n'importe quelle base ON directe.

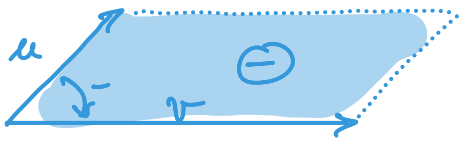
Bref c'est 2 (ou 3)-linéaire par rapport à ses colonnes, alternée.

Interprétation géométrique. *$[u,v]$ est l'aire algébrique du parallélogramme construit sur (u,v).*

$[u,v,w]$ est le volume algébrique du parallélépipède construit sur (u,v,w).



$$[u,v] = \|u\| \, \|v\| \sin\alpha$$



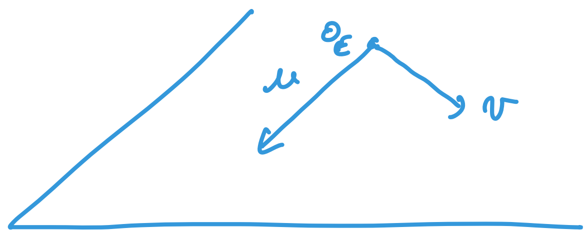
1.3.3 Produit vectoriel

Définition. Dans E espace vectoriel de dimension 3, on considère deux vecteurs u, v. On appelle **produit vectoriel de u par v**, et on note $u \wedge v$, l'unique vecteur tel que :

$$\forall w \in E,\ [u, v, w] = \langle u \wedge v, w \rangle$$

Soit $u, v \in E$

$$\varphi : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & [u, v, x] \end{array}$$



φ est une forme linéaire

Th de repr des formes linéaires :

$\exists ! a \in E$ tq $\forall x \in E$, $\varphi(x) = \langle a, x \rangle$

On note $a = u \wedge v$, appelé produit vectoriel de u et v.

Ainsi :

$$\forall x \in E \quad [u, v, x] = \langle u \wedge v, x \rangle$$

Proposition. Soit u, v deux vecteurs de E espace eucliden de dimension 3.

- $u \wedge v = 0$ si et seulement si (u, v) est liée.
- Si (u, v) est libre, alors $u \wedge v \in \mathrm{Vect}(u, v)^{\perp}$ et $(u, v, u \wedge v)$ est une base directe.

L'application $(u, v) \mapsto u \wedge v$ est bilinéaire et antisymétrique (*i.e.* $u \wedge v = -v \wedge u$).

- $\boxed{\Leftarrow}$ Si (u,v) liée, $\varphi : x \longmapsto [u, v, x] = \det_{\mathcal{B}}(u, v, x) = 0$

  donc φ forme linéaire nulle donc $a = 0$

  ie $u \wedge v = 0$

  $\boxed{\Rightarrow}$ par contraposée. On suppose (u,v) libre.

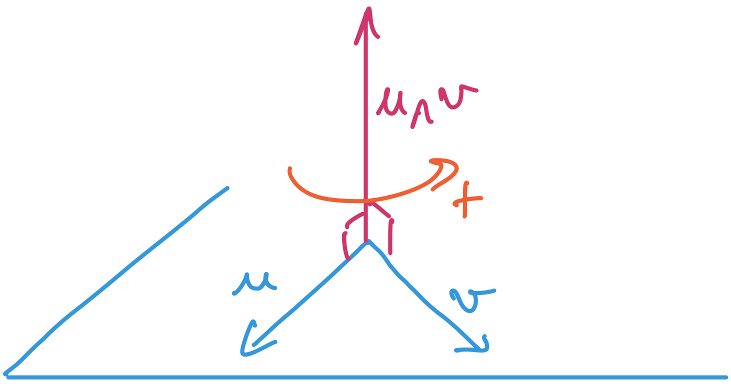
On complète cette famille libre en (u,v,w) base de E.

On a donc $\varphi(w) = [u,v,w] = \det_{\mathcal{B}}(u,v,w) \neq 0$

$\varphi(w) = \langle u \wedge v, w \rangle$

donc $u \wedge v \neq 0$

- Si (u,v) est libre, alors $u \wedge v \in \mathrm{Vect}(u,v)^{\perp}$ et $(u,v,u\wedge v)$ est une base directe.



$$\begin{cases} \langle u\wedge v, u \rangle = [u,v,u] = 0 \\ \langle u \wedge v, v \rangle = [u,v,v] = 0 \end{cases}$$

donc $u \wedge v \in \mathrm{Vect}(u,v)^{\perp}$

$$\det_{\mathcal{B}}(u,v,u\wedge v) = [u,v,u\wedge v]$$ où $\mathcal{B}$ base ON directe

$$= \langle u\wedge v, u \wedge v\rangle$$

$$= \|u\wedge v\|^2$$

$$> 0$$

donc $(u,v,u\wedge v)$ est directe

L'application $(u, v) \mapsto u \wedge v$ est bilinéaire et antisymétrique (*i.e.* $u \wedge v = -v \wedge u$).

Soit $u, v_1, v_2 \in E$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$\forall x \in E \quad [u, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, x] = \lambda_1 [u, v_1, x] + \lambda_2 [u, v_2, x]$$

$$\langle u \wedge (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2), x \rangle \qquad \lambda_1 \langle u \wedge v_1, x \rangle + \lambda_2 \langle u \wedge v_2, x \rangle$$

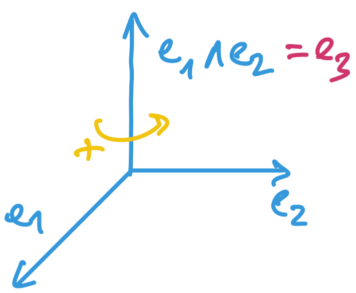
$$= \langle \lambda_1 (u \wedge v_1) + \lambda_2 (u \wedge v_2), x \rangle$$

donc : $\forall x \in E$

$$\langle (u \wedge (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)) - (\lambda_1 (u \wedge v_1) + \lambda_2 (u \wedge v_2)), x \rangle = 0$$

donc $u \wedge (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 u \wedge v_1 + \lambda_2 u \wedge v_2$

Remarque. *Le produit vectoriel est donc un outil commode pour construire un vecteur orthogonal à deux vecteurs donnés.*
On a aussi, si e_1, e_2 unitaires et orthogonaux, alors $(e_1, e_2, e_1 \wedge e_2)$ base orthonormée directe.



$e_2 \wedge e_3 = e_1$

$e_1 \wedge e_3 = -e_2$

Calcul du produit vectoriel dans une base orthonormée directe. Soit $u \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $v \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. Alors :

$$u \wedge v \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$$

Preuve : $u \wedge v = (x e_1 + y e_2 + z e_3) \wedge (x' e_1 + y' e_2 + z' e_3)$

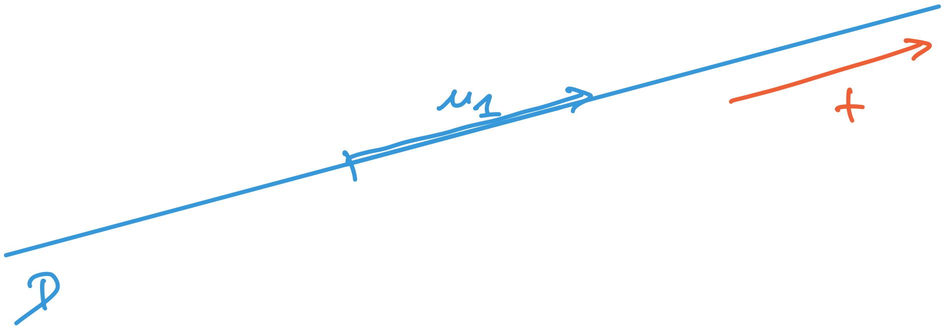
$$= x x' \underbrace{e_1 \wedge e_1}_{=0} + x y' \underbrace{e_1 \wedge e_2}_{e_3} + x z' \underbrace{e_1 \wedge e_3}_{-e_2}$$

$+ \dots$ 6 autres termes

$$= (y z' - z y') e_1 + \dots$$

1.3.4 Orientation d'un plan ou d'une droite dans un espace euclidien de dimension 3

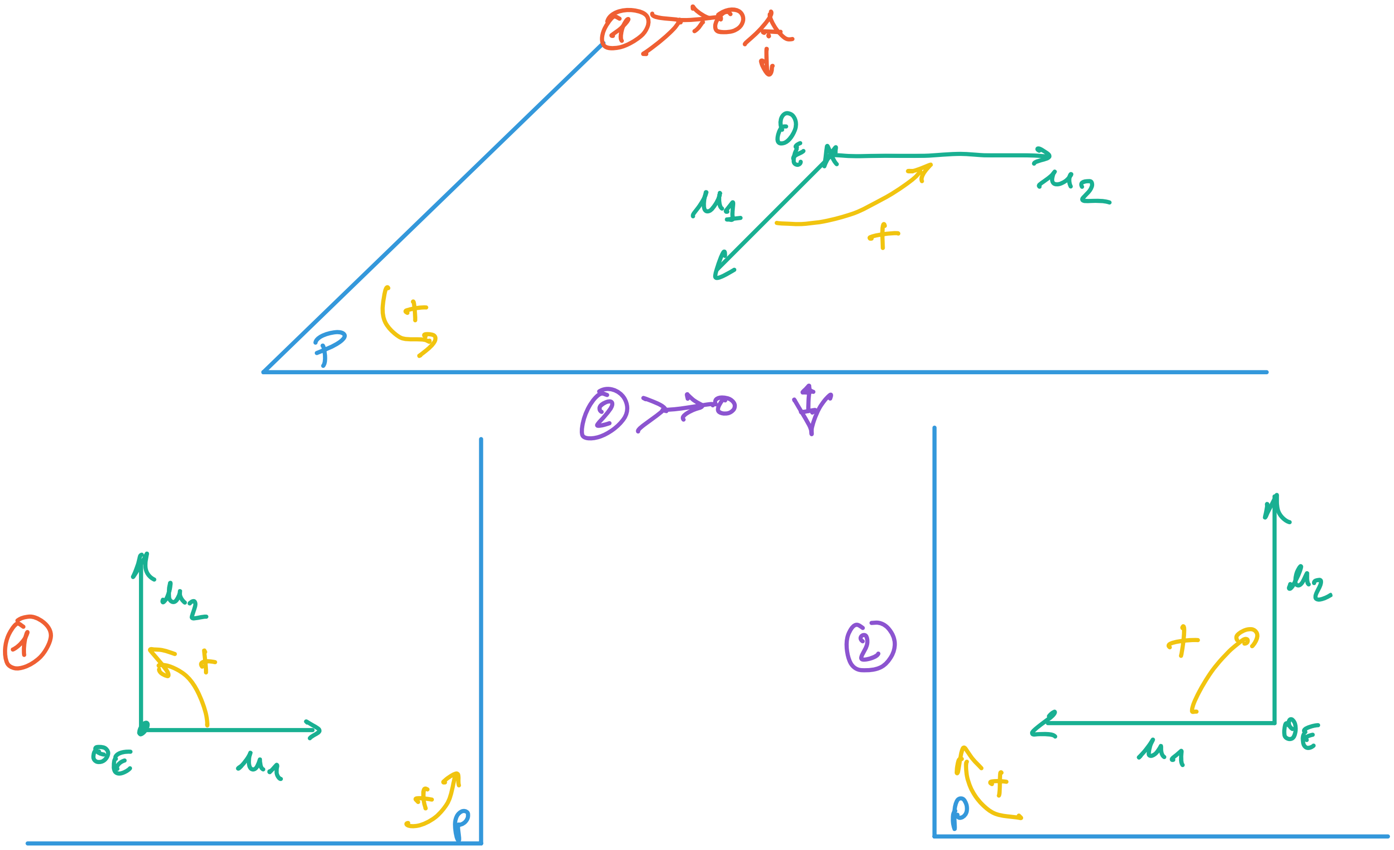
Définition. **Orienter une droite** D dans l'espace euclidien de dimension 3, c'est choisir une base de D, c'est-à-dire un vecteur directeur (non nul) de D.
On dit que deux vecteurs u_1 **et** u_2 **définissent la même orientation de** D si et seulement si $\langle u_1, u_2 \rangle > 0$.



u_1 oriente D

Définition. **Orienter un plan** P dans l'espace euclidien de dimension 3, c'est choisir une base de P, c'est-à-dire un couple de vecteurs (u, v) non colinéaires de P.
On dit que deux bases (u_1, v_1) **et** (u_2, v_2) **définissent la même orientation de** P si et seulement si $\langle u_1 \wedge v_1, u_2 \wedge v_2 \rangle > 0$.

Remarque. *Le choix d'une orientation de P revient donc à choisir un vecteur n non nul orthogonal à P.*

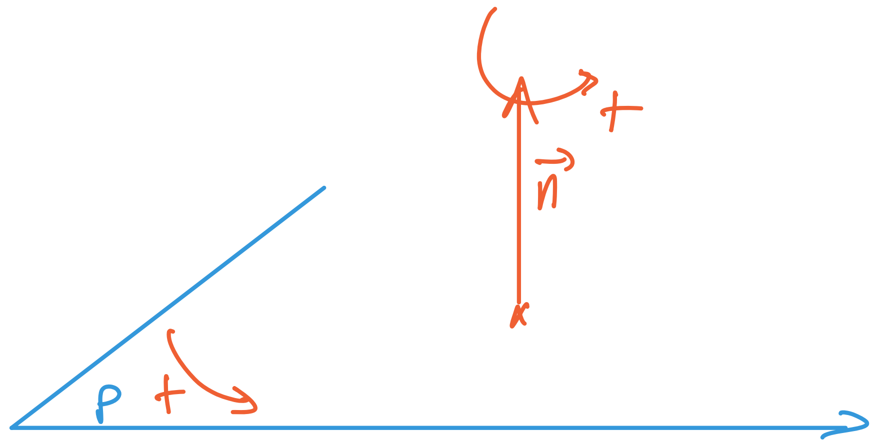


Important de dire l'orientation des plans dans l'espace.

Plutôt que de donner une base de P appelée directe,

on donne un vecteur un vecteur normal à P

qui définit l'orientation.



Donner $\vec{n}$ orthogonal à P définit l'orientation de P.

1.4 Isométries vectorielles d'un plan euclidien

Dans ce paragraphe, on travaille dans un espace euclidien E_2 de dimension 2.

1.4.1 Étude de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$

Proposition. Le groupe $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est constitué des matrices :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

R_θ est appelée **matrice de rotation plane d'angle** θ.

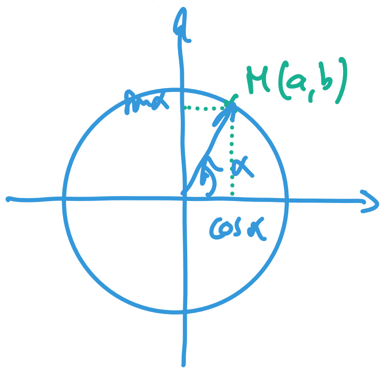
Preuves Analyse :

Soit $M \in SO_2(\mathbb{R})$ avec $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

M orthogonale donc ses colonnes sont unitaires :

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \end{cases}$$

donc $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq $a = \cos\alpha$, $b = \sin\alpha$, $c = \cos\beta$, $d = \sin\beta$.



On a aussi : les colonnes sont orthogonales :

$$ac + bd = 0$$

ie $\underbrace{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}_{\cos(\alpha-\beta)} = 0$

donc $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $\alpha - \beta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

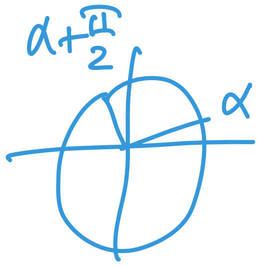
On a aussi $\det M = +1$ car $M \in SO_2(\mathbb{R})$

$$ad - bc = 1$$

i.e. $\cos\alpha \sin\beta - \sin\alpha \cos\beta = 1$

$$\underbrace{\cos\alpha \sin\beta - \sin\alpha \cos\beta}_{\sin(\beta-\alpha)}$$

donc $\beta - \alpha = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$



Bref : $\beta = \alpha + \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

donc $\begin{cases} \cos\beta = -\sin\alpha \\ \sin\beta = +\cos\alpha \end{cases}$

Ainsi : $\exists \alpha$ tq $M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

Synthèse Soit $M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

On a : $\|C_1\|^2 = \|C_2\|^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$$\langle C_1, C_2 \rangle = -\cos\alpha \sin\alpha + \sin\alpha \cos\alpha = 0$$

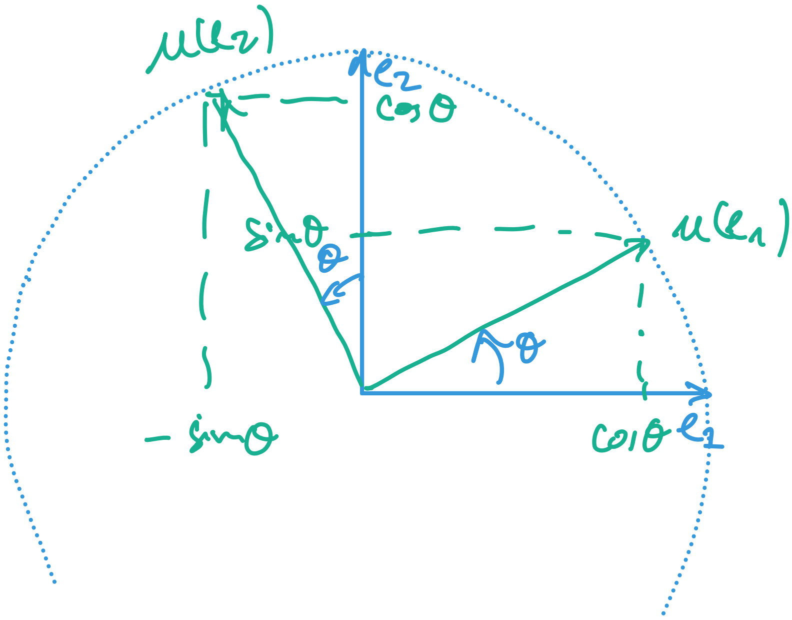
donc $M \in O_2(\mathbb{R})$

et $\det M = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

donc $M \in SO_2(\mathbb{R})$.

dans le plan usuel $\mathcal{B}=(e_1,e_2)$ base canonique

$$R_\theta = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} u(e_1) & u(e_2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} \end{array}$$



Proposition. Le groupe $SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif et on a :

$$\forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R},\ R_{\theta_1} R_{\theta_2} = R_{\theta_1+\theta_2}$$

$$R_{\theta_1} R_{\theta_2} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta_1+\theta_2 & -\sin\theta_1+\theta_2 \\ \sin\theta_1+\theta_2 & \cos\theta_1+\theta_2 \end{pmatrix}$$

$$= R_{\theta_1+\theta_2}$$

$$= R_{\theta_2+\theta_1} = R_{\theta_2} R_{\theta_1}$$

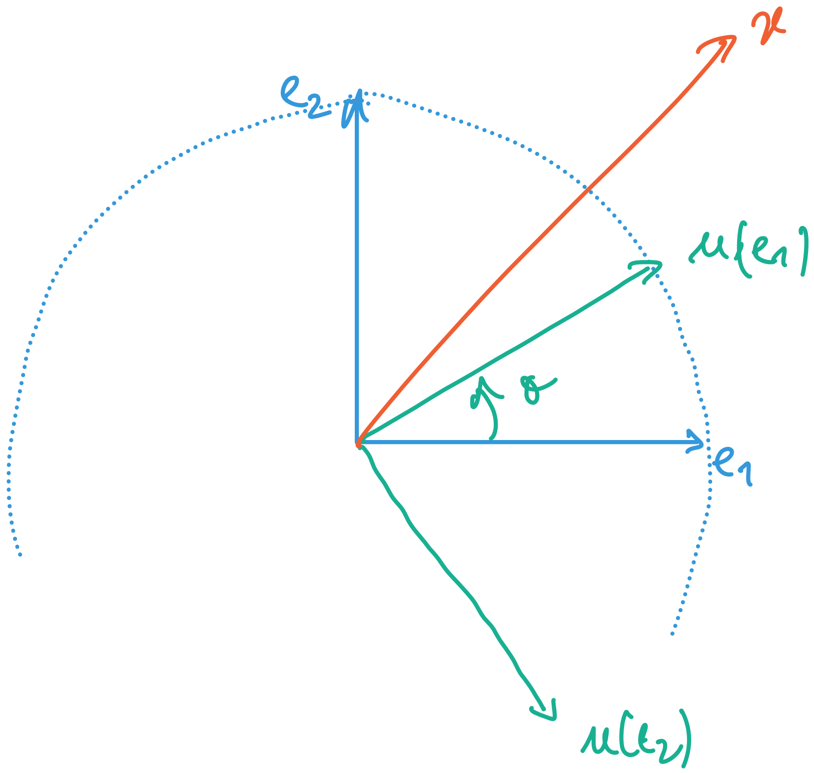
Proposition. L'ensemble $O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R})$ est constitué des matrices :

$$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

preuve comme pour $SO_2(\mathbb{R})$

$\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ base canonique de $\mathbb{R}^2$

$u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tq $S_\theta = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$



Valeurs propres de u ?

$$\chi_{S_\theta}(X) = \begin{vmatrix} X - \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & X + \cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= X^2 - \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$= (X-1)(X+1)$$

scindé simple

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in E_1(S_\theta) \iff \begin{cases}(\cos\theta-1)x+\sin\theta\, y=0\\ \sin\theta\, x-(\cos\theta+1)y=0\end{cases}$$

$\sin\theta\, L_1+(1-\cos\theta)L_2$

$$\iff \begin{cases}(\cos\theta-1)x+\sin\theta\, y=0\\ (\sin^2\theta)y \cancel{-(1-\cos\theta)(\cos\theta+1)y} = 0\end{cases}$$

$$\iff (\cos\theta-1)x+\sin\theta\, y=0$$

$$\iff \left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}-1\right)x+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,y=0$$

$$\iff -2\sin^2\frac{\theta}{2}\,x+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,y=0$$

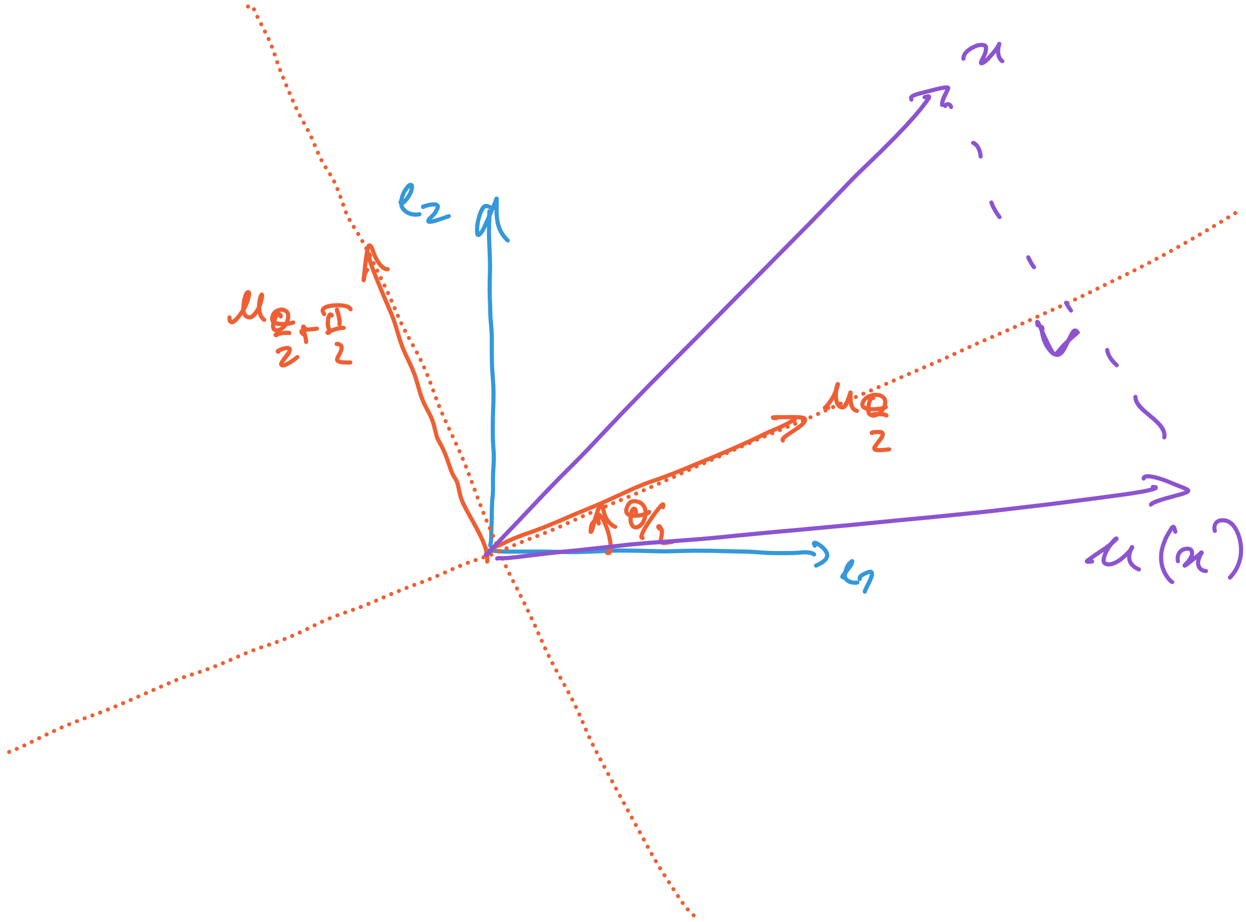
$$\iff \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}$$

Donc $E_1(S_\theta)=D_{\frac{\theta}{2}}$ droite vecto d'angle polaire $\frac{\theta}{2}$

De même $E_{-1}(S_\theta)=D_{\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}}$

En notant $\mathcal{B}'=\left(e_{\frac{\theta}{2}},\ e_{\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}}\right)$

$$\mathrm{Mat}(u,\mathcal{B}')=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$ Symétrie



On comprend que u est la symétrie orthogonale par rapport à $D_{\theta/_2}$.

1.4.2 Isométries vectorielles, angle

Proposition. Soit $u \in \mathrm{SO}(E_2)$. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que, dans toute base orthonormée directe de E_2, la matrice de u soit R_θ.
On dit que u est la **rotation vectorielle d'angle** θ.

Remarque.

- *Il est remarquable que la matrice de u ne dépende pas de la base orthonormée directe choisie.*
- *θ n'est pas défini de façon unique, mais à 2π près. On dit que c'est une* **mesure** *de l'angle de la rotation.*
- *L'écriture complexe de la rotation vectorielle d'angle θ est :*

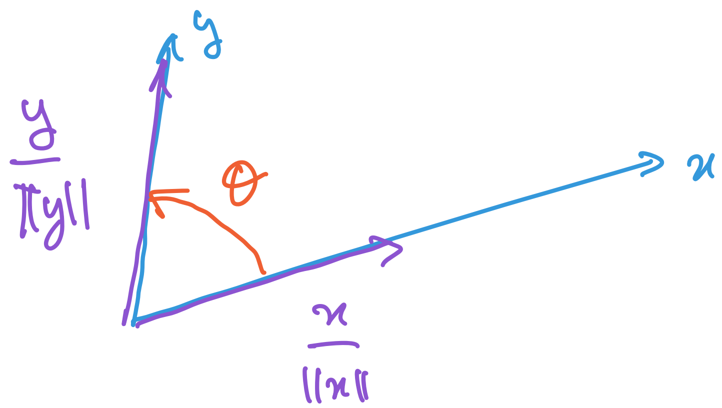
$$z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z$$

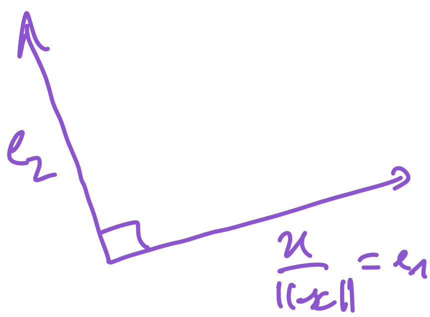
Elle coïncide bien-sûr avec :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

lorsque $z = x + \mathrm{i}y$.

Remarque. *Si x, y sont deux vecteurs unitaires, alors il existe une unique rotation $u \in \mathrm{SO}(E_2)$ telle que $y = u(x)$.*
Si x, y deux vecteurs non nuls, on peut alors appeler **mesure de l'angle orienté** *(x, y) tout réel θ tel que la rotation d'angle θ envoie $\frac{x}{\|x\|}$ sur $\frac{y}{\|y\|}$.*





On complète $e_1 = \frac{x}{\|x\|}$ en $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ base OND.

De même

On complète $f_1 = \frac{y}{\|y\|}$ en $\mathcal{B}' = (f_1, f_2)$ base OND

On note $u \in \mathcal{L}(E)$ tq $\begin{cases} u(e_1) = f_1 \\ u(e_2) = f_2 \end{cases}$

u envoie base OND sur base OND

donc $u \in SO(E)$

donc u est une rotation d'angle θ.

On appelle θ angle orienté de x à y.

1.4.3 Classification des isométries vectorielles du plan euclidien

Proposition. Si $u \in \mathrm{SO}(E_2)$, et $u \neq \pm \mathrm{id}_E$, alors u n'est pas diagonalisable.

Si $u \in \mathrm{O}(E_2) \setminus \mathrm{SO}(E)$, alors u est diagonalisable et c'est la symétrie orthogonale par rapport à l'espace propre $E_1(u)$.

Théorème.

Soit $u \in \mathrm{O}(E_2)$. On note $\mathrm{Inv}(u) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ ses vecteurs invariants.

- Si $\dim \mathrm{Inv}(u) = 2$, alors $u = \mathrm{id}_E$.
- Si $\dim \mathrm{Inv}(u) = 1$, alors u est la réflexion d'axe $\mathrm{Inv}(u)$.
- Si $\dim \mathrm{Inv}(u) = 0$, alors u est une rotation (éventuellement $-\mathrm{id}_E$).