Pour moi : 207.3, 207.4

Endomorphismes remarquables des espaces euclidiens

E euclidien $\langle \cdot , \cdot \rangle$ E de dim finie

$u : E \longrightarrow E$

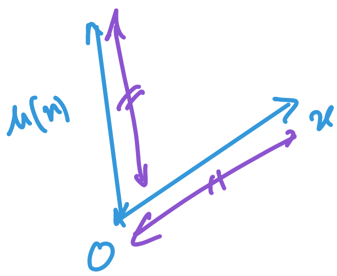
Dans ce chapitre, E désigne un espace euclidien, c'est-à-dire un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, de dimension finie n, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

1 Isométries vectorielles et matrices orthogonales

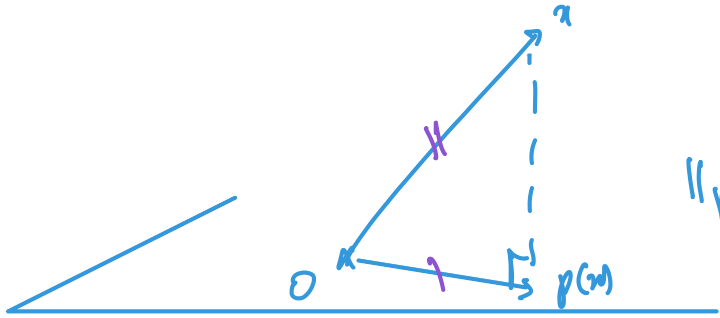
1.1 Isométries vectorielles

Définition. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est une **isométrie vectorielle** si et seulement s'il conserve la norme, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$$

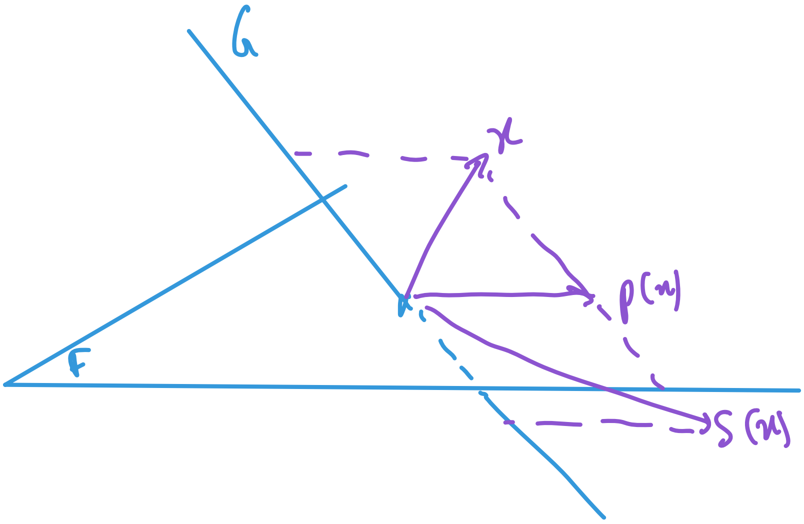


Projection orthogonale

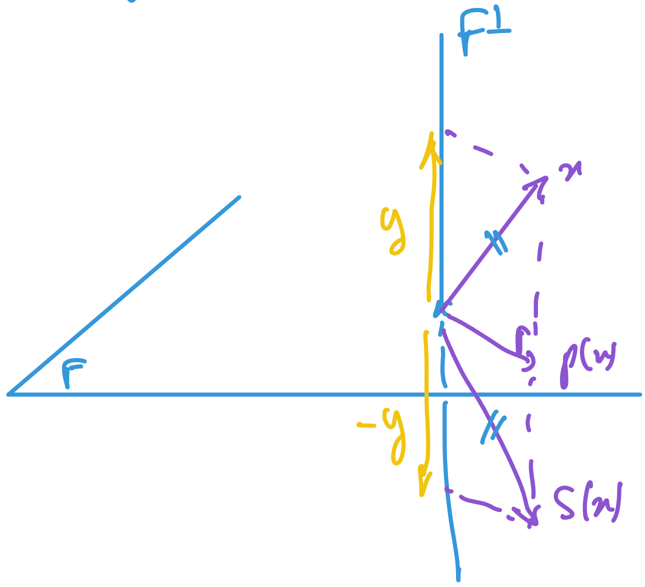


$\|p(x)\| \leq \|x\|$

Symétrie



Symétrie orthogonale



$$\|S(x)\|^2 = \|-y\|^2 + \|p(x)\|^2$$
$$= \|y\|^2 + \|p(x)\|^2$$
$$= \|x\|^2$$

Les symétries orthogonales sont des sym. vectorielles

Proposition. $u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie vectorielle si et seulement s'il conserve le produit scalaire, c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in E,\ \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$$

Preuve:

$$\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\langle a, b\rangle$$

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ immédiat

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que u préserve la norme.

Soit $x, y \in E$

$$\langle u(x), u(y)\rangle = \frac{1}{2}\left(\|u(x)+u(y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|u(x+y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2 \right)$$

car u linéaire

$$= \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 \right)$$

car u préserve la norme

$$= \langle x, y \rangle$$

par ident. de polarisation

Proposition. Toute isométrie vectorielle est un automorphisme de E.

Remarque. *On parle d'isométrie car les distances sont préservées.*

On trouve aussi la dénomination ***automorphisme orthogonal*** *pour désigner les isométries vectorielles.*

$\parallel$

isométrie vectorielle

Proposition. $u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie vectorielle si et seulement si l'image d'une base orthonormée par u est une base orthonormée.

Preuve:

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que u préserve le produit scalaire.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base O.N de E.

Mq $\mathcal{C} = (u(e_1), \dots, u(e_n))$ base ON de E.

$\forall i, j \quad \langle u(e_i), u(e_j) \rangle$

$= \langle e_i, e_j \rangle$ car u isom vecto

$= \delta_{ij}$ car $\mathcal{B}$ base ON.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que u transforme une base ON $\mathcal{B} = (e_1 .. e_n)$

en une base ON $\mathcal{C} = (u(e_1) .. u(e_n))$

Mque u préserve la norme.

Soit $x \in E$

Notons $(x_1 \dots x_n)$ les coord de x dans $\mathcal{B}$

(ie $x_k = \langle x | e_k \rangle$ $\forall k$ car base ON)

On a donc $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$

puis $u(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k u(e_k)$

donc $(x_1 \dots x_n)$ sont les coord de $u(x)$ dans $\mathcal{E}$.

Expression de la norme en base ON :

$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

$\|u(x)\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

Définition. On note $\mathrm{O}(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E. Muni de la loi $\circ$, c'est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$, appelé **groupe orthogonal de** E.

Rmq : E ev

E ensemble

structuré avec 2 lois $+ , \cdot$

"opérations"

addition de 2 vecteurs
mult. par un scalaire

} C.L.

C'est quoi un "groupe"

G est un groupe est un ensemble

muni d'une loi (opération) $\circ$

tq
- $\circ$ admet un neutre
- G stable par $\circ$
- G stable par passage au symétrique

Mque $O(E)$ est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$

- **Mque $O(E) \subset GL(E)$**

Soit u une isométrie vectorielle.

Mque u est bijective

Soit $x \in \operatorname{Ker} u$ ie $u(x) = 0$

alors $\|x\| = \|u(x)\|$

$= 0$

donc $x = 0$

Ainsi u est injective

Or $u \in \mathcal{L}(E)$ où E de dim finie

donc u est bijective

- **Stabilité de $O(E)$ par $\circ$:**

Soit $u, v \in O(E)$

$\forall x \in E$

$$\|u \circ v(x)\| = \|u[v(x)]\|$$

$= \|v(x)\|$ car $u \in O(E)$

$= \|x\|$ car $v \in O(E)$

donc $u \circ v \in O(E)$

- <u>Stabilité de $O(E)$ par passage au symétrique</u>

(ie la réciproque ici)

Soit $u \in O(E)$ <u>Mque $u^{-1} \in O(E)$.</u>

Pour $x \in E$

$$\|u^{-1}(x)\| = \|u(u^{-1}(x))\| \quad \text{car } u \in O(E)$$

$$= \|x\|$$

donc $u^{-1} \in O(E)$

Exemple. Les symétries orthogonales sont des isométries vectorielles.
Les projecteurs orthogonaux ne sont pas, en général, des isométries vectorielles.

Proposition. Soit $u \in \mathrm{O}(E)$. Alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u) \subset \{-1, 1\}$.

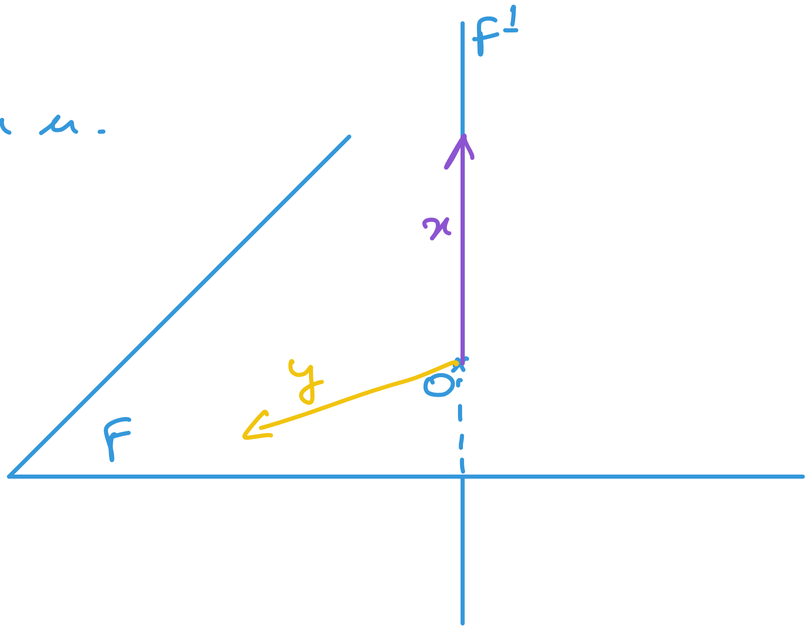
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u)$ ie $\exists x \neq 0$ tq $u(x) = \lambda x$

donc
$$\underbrace{\|u(x)\|}_{=\|x\|} = \underbrace{\|\lambda x\|}_{=|\lambda|\,\|x\|}$$

avec $\|x\| \neq 0$ donc $|\lambda| = 1$

Proposition. Soit $u \in \mathrm{O}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E. Si F est stable par u, alors $F^{\perp}$ est stable par u.

On suppose F stable u.



Soit $x \in F^{\perp}$ Mque $u(x) \in F^{\perp}$

Soit $y \in F$,

$$\langle u(x), y \rangle = \ ?$$

Considérons
$$u_F : F \longrightarrow F \quad (\text{car } F \text{ stable par } u)$$
$$t \longmapsto u(t)$$

u préserve la norme, donc u_F aussi

donc $u_F \in \mathrm{O}(F)$ donc bijectif donc $\exists t \in F$ tq $y = u_F(t)$

$= u(t)$

Remarque:

$$\langle u(x), y \rangle = \langle u(x), u(t) \rangle$$

$= \langle x, t \rangle$ car $u \in O(E)$

$= 0$ car $x \in F^\perp$, $t \in F$

Corollaire. Soit $u \in \mathrm{O}(E)$, F un sous-espace vectoriel de dimension p stable par u. Alors la matrice M de u dans une base adaptée à la décomposition $E = F \overset{\perp}{\bigoplus} F^{\perp}$ est diagonale par bloc :

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{R})$.

Remarque. *Le résultat précédent s'applique en particulier lorsque $u \in \mathrm{O}(E)$, $\lambda \in \{-1, 1\}$ une valeur propre de u, et $F = E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_E)$.*

1.2 Matrices orthogonales

Théorème.

> Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et M la matrice de u dans une base orthonormée de E.
> Alors $u \in \mathrm{O}(E)$ si et seulement si $M^\top M = I_n$.

Preuve: $\mathcal{B} = (e_1 \dots e_n)$ base ON

$$M = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & u(e_j) & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} & \vdots & \\ & \langle u(e_j), e_i \rangle & - \end{array} \right) e_i \end{array}$$

car $\mathcal{B}$ est ON

$$\cancel{[M^T M]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [M^T]_{ik} [M]_{kj}}$$

$$= \cancel{\sum_{k=1}^{n} [M]_{ki} [M]_{kj}}$$

$$= \cancel{\sum_{k=1}^{n} \langle u(e_i), e_k \rangle \langle u(e_j), e_k \rangle}$$

Notons C_j les colonnes de M $\qquad C_j = \mathrm{Mat}(u(e_j), \mathcal{B})$

$$M^T M = \begin{pmatrix} C_1^T \\ \hline C_2^T \\ \vdots \\ \hline C_n^T \end{pmatrix} \left(C_1 \middle| C_2 \middle| \cdots \middle| C_n \right)$$

$$= \left(C_i^T C_j \right)_{i,j}$$

$$= \left(\langle u(e_i), u(e_j) \rangle \right)_{i,j}$$

car $C_i^T C_j$ est l'expr matricielle

du produit scalaire en base ON.

$$M^T M = I_n \iff \forall i,j \ \langle u(e_i), u(e_j) \rangle = \delta_{ij}$$

$$\iff (u(e_1) \dots u(e_n)) \text{ base ON}$$

$$\iff u \in O(E)$$

Définition. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que M est **orthogonale** si et seulement si l'endomorphisme canoniquement associé à M est une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^n$.

$$\iff M^T M = I_n$$

matrice d'une isom vecto
en base ON

Proposition. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Sont équivalentes :

(i) M est une matrice orthogonale ;

(ii) $M^\top M = I_n$;

(iii) M est inversible et $M^{-1} = M^\top$;

(iv) $MM^\top = I_n$;

(v) Les colonnes de M forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$;

~~(vi) Les lignes de M forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.~~

Remarque. *En pratique, c'est le point (v) qui est le plus simple à rédiger.*

*Attention au vocabulaire : une matrice ortho**gonale** est une matrice dont les colonnes forment une base ortho**normée**.*

$\forall i, j \quad \langle C_i , C_j \rangle = \delta_{ij}$

$\langle C_i , C_j \rangle = C_i^\top C_j$

coeff i,j de $M^\top M$

Corollaire. Un endomorphisme de E est une isométrie vectorielle si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée est orthogonale.

Proposition. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et $\mathcal{B}'$ une famille à n vecteurs de E. Soit $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.

Alors $\mathcal{B}'$ est une base orthonormée si et seulement si P est une matrice orthogonale.

Corollaire. Les matrices orthogonales sont les matrices de changement de bases orthonormées.

Définition. On note $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, ou parfois $\mathrm{O}(n)$, l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Muni de la loi $\times$, c'est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, appelé **groupe orthogonal d'ordre** n.

Proposition. Soit $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Alors $\det M = \pm 1$.

Définition. On note :

$$\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \text{ t.q. } \det M = +1\}$$

C'est un sous-groupe de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ appelé **groupe spécial orthogonal**. On trouve aussi la notation $\mathrm{SO}(n)$.

Remarque. *Si $u \in \mathrm{O}(E)$, alors $\det u = \pm 1$. On peut définir de même :*

$$\mathrm{SO}(E) = \{u \in \mathrm{O}(E) \text{ t.q. } \det u = +1\}$$

*Ses éléments s'appellent les **isométries vectorielles directes** (ou positives), tandis que celles de déterminant -1 sont qualifiées d'**indirectes** (ou négatives).*