Pour moi : 207.1, 207.6

Cas d'une série numérique $\sum u_n$

Si $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell < 1$ alors $\sum u_n$ cv abs

Si $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell > 1$ alors $\sum u_n$ div. grossièrement

Si $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ ou n'a pas de limite) alors on ne peut pas conclure

(c'est une comparaison à une série géométrique)

1.3.4 Utilisation de la règle de d'Alembert

Règle de d'Alembert pour les séries entières.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière avec $a_n \neq 0$ pour tout n. Si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors $R = \frac{1}{\ell}$.

(y compris $\ell = +\infty$
$\ell = 0$)

preuve: on applique la règle de d'Alembert à la série numérique $\sum a_n z^n$

pour $z \neq 0$ fixé.

1er cas $\ell \in]0, +\infty[$ $\left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |z|$

$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell |z|$

* Si $|z| < \frac{1}{\ell}$, $\left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| \longrightarrow \ell |z| < 1$

donc $\sum a_n z^n$ cv absolument

donc $|z| \leq R$ pour tout $|z| < \frac{1}{\ell}$

donc $\frac{1}{\ell} \leq R$

* Si $|z| > \frac{1}{\ell}$, $\left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| \longrightarrow \ell |z| > 1$

donc $\sum a_n z^n$ div grossièrement

donc $R \leqslant |z|$ pour tout $|z| > \frac{1}{\ell}$

donc $R \leqslant \frac{1}{\ell}$

D'où l'égalité $R = \frac{1}{\ell}$

2e cas : $\ell = 0$

$\forall z \quad \left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 < 1$

donc $\sum a_n z^n$ cv absolument $\forall z$

donc $R = +\infty$

3e cas $\ell = +\infty$

[...]

Remarque: $\boxed{\text{savoir faire le raisonnement du 1er cas.}}$

Remarque.

- *Cette méthode est commode lorsque a_n est une fraction rationnelle, ou une exponentielle, ou contient des factorielles. Elle est peu adaptée aux cas où a_n est défini par cas ou de façon un peu abstraite.*
- *Lorsque $\ell = +\infty$, $R = 0$; lorsque $\ell = 0$, $R = +\infty$.*
- *Lorsque la suite $(a_n)_n$ s'annule, on peut envisager d'utiliser la règle de d'Alembert pour les séries numériques, à $z \neq 0$ fixé.*
- *Souvent, la détermination du rayon de convergence peut se faire sans utiliser la règle de d'Alembert.*

Exemple. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\text{(a)} \sum \frac{n!}{n^n} z^n \qquad \text{(b)} \sum \frac{z^{2n}}{n^2+1} \qquad \text{(c)} \sum \frac{2^n}{3^n+1} z^{3n} \qquad \text{(d)} \sum \frac{n}{2^n} z^{3n}$$

(a) On note $a_n = \dfrac{n!}{n^n} \neq 0 \ \forall n$

On applique la règle de d'Alembert sur les séries entières

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}} = (n+1) \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{-n\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$$

$$= e^{-1+o(1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e}$$

donc $\underline{R = e}$

(b) $\cancel{b_n}$: $\begin{cases} b_{2n+1} = 0 \\ b_{2n} = \dfrac{1}{n^2+1} \end{cases}$ $\qquad 1 + 0z + \frac{1}{2}z^2 + 0z^3 + \dots$

$$\sum \frac{z^{2n}}{n^2+1}$$

On ne peut pas appliquer la règle de d'Alembert sur les séries entières. On applique la règle de d'Alembert sur les séries numériques.

Soit $z \neq 0$ fixé

$$\left|\frac{\dfrac{z^{2n+2}}{(n+1)^2+1}}{\dfrac{z^{2n}}{n^2+1}}\right| = \frac{n^2+1}{n^2+2n+2} \cdot |z|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} |z|^2$$

$\underline{1^{er} \text{ cas}}$ si $|z|^2 < 1$ ie $|z| < 1$, $\sum b_n z^n$ cv absolument

donc $\forall |z| < 1$, $|z| \leq R$ donc $1 \leq R$

$\underline{2^e \text{ cas}}$ Si $|z|^2 > 1$ ie $|z| > 1$ $\sum a_n z^n$ div g.

donc $\forall |z| > 1$, $R \leq |z|$ donc $R \leq 1$

$\underline{\text{Ccl}}$: $R = 1$

M2 $R\left(\sum \frac{1}{n^2+1} z^{2n}\right) = R\left(\sum \frac{1}{n^2} z^{2n}\right)$ car $n^2+1 \sim n^2$

$$= R\left(\sum z^{2n}\right)$$

$$= 1$$

(c) $\sum \frac{2^n}{3^n+1} z^{3n}$

On applique la règle de d'Alembert pour les séries numériques, à $z \neq 0$ fixé.

$$\left| \frac{\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}+1} z^{3n+3}}{\frac{2^n}{3^n+1} z^{3n}} \right| = \frac{3^n+1}{3^{n+1}+1} \cdot 2 \cdot |z|^3$$

$$\underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2}{3} |z|^3$$

$\underline{1^{er} \text{ cas}}$ Si $\frac{2}{3}|z|^3 < 1$ ie $|z| < \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$

$\sum a_n z^n$ cv absolument.

donc $|z| \leq R$ $\forall |z| < \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$

donc $R \geq \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$

2e cas : Si $\frac{2}{3}|z|^3 > 1$ ie $|z| > \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$

$\sum c_n z^n$ div grossièrement

donc $R \leq |z|$ $\forall |z| > \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$

donc $R \leq \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$

donc $R = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$

(112) $R\left(\sum \frac{2^n}{3^n+1} z^{3n}\right)$ $\qquad 3^n+1 \underset{+\infty}{\sim} 3^n$

$= R\left(\sum \left(\frac{2}{3} z^3\right)^n\right)$

$= \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ comme série géométrique

Exemple. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum \sin(n) z^n \qquad\qquad \sum a_n z^n \text{ où } \begin{cases} a_{2n} = 2^{2n} \\ a_{2n+1} = 1 \end{cases}$$

(a) idée 1 : d'Alembert $\left| \dfrac{\sin(n+1)}{\sin(n)} \right| = \dfrac{\sin(n) - - -}{\sin(n)}$

pas de limite

idée 2 $(\sin(n) 1^n)_n$ bornée, ne tend pas vers 0

donc $R = 1$

(b) On ne peut pas envisager $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ - - - . .

$|a_n| \leq 2^n$ donc $R \geq R(\sum 2^n z^n)$

$= \frac{1}{2}$ (série géom)

pour $|z| > \frac{1}{2}$, $a_{2n} |z|^{2n} = 2^{2n} \cdot |z|^{2n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

donc $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement

donc $R \leq |z| \quad \forall |z| > \frac{1}{2}$

donc $R \leq \frac{1}{2}$

4.4 Calcul de la somme d'une série entière

Pistes.

- Connaître le formulaire du § 4.3.4 !
- Reconnaître des combinaisons linéaires (parfois aux premiers termes près) de SE du formulaire.
- Reconnaître des dérivées de SE connues. En particulier, pour $|x| < 1$:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n$$

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) x^n$$

- Ne pas hésiter à factoriser par x, x^2 ou alors $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$ pour $x \neq 0$ pour ajuster le degré de x.
- On peut dériver $S(x)$ en $S'(x)$, $S''(x)$ et faire apparaître une SE connue ou une équation différentielle satisfaite par $S(x)$.
- Si on connaît une relation de récurrence satisfaite par les a_n, on multiplie par x^n et on somme ces relations, pour obtenir une équation fonctionnelle satisfaite par $S(x)$.

Exemple. Déterminer la somme des séries entières suivantes :

(a) $\sum_{n \geqslant 0} n^2 x^n$ (b) $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(n+1)^2}{n} x^n$ (c) $\sum_{n \geqslant 0} \frac{(n+1)}{n!} x^n$

(d) $\sum_{n \geqslant 0} \frac{(n+1)}{(n+2)n!} x^n$ (e) $\sum_{n \geqslant 0} (2^n + 3^n) x^n$ (f) $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$

où $a_{n+1} = 2a_n$

(a) M1 • Déterminons le rayon de cv

$$R\left(\sum n^2 x^n\right) = R\left(\sum x^n\right)$$

$$= 1 \quad \text{comme série géom.}$$

• Donc $\forall x \in]-1, 1[$ On connaît

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$$

$$\frac{d}{dx} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = (1-x)^{-2}$$

$$\frac{d}{dx} \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2} = 2 \cdot (1-x)^{-3}$$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$$

écrire n^2 comme CL de $n(n-1)$, n et 1

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^n + nx^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n$$

(2 séries cv pour $x \in]-1,1[$)

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$$

$$= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$$

$$= x^2 \cdot \frac{2}{(1-x)^3} + x \cdot \frac{1}{(1-x)^2}$$

(R2) On donnera le rayon de cv à la fin.

Pour $x \in]-R,R[$:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$$

$$= x^2 \underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}}_{\substack{\text{SE comme} \\ \text{de rayon } 1}} + x \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}}_{\substack{\text{SE comme} \\ \text{de rayon } 1}}$$

Donc $R \geq 1$ et $\forall x \in]-1,1[$

$$S(x) = x^2 \frac{2}{(1-x)^3} + x \frac{1}{(1-x)^2}$$

(b) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(n+1)^2}{n} x^n$

On note R le rayon de ce

$\forall x \in]-R, R[\qquad S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^2}{n} x^n$

idée 1 : $S'(x)$

idée 2 : CL de 3 SE connues

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n + 2x^n + \frac{1}{n} x^n$$

CL de 3 SE connues, de rayon 1

donc $R \geqslant 1$ et $\forall x \in]-1, 1[$

$$S(x) = x \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$= x \cdot \frac{1}{(1-x)^2} + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{1-x} - \ln(1-x)$$

(c) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(n+1)}{n!} x^n$

$\frac{n}{n!} \neq \frac{1}{(n-1)!}$ pour $n=0$

Pour $x \in]-R, R[$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} + \frac{1}{n!} \quad x^n$$

CL de 2 SE de rayon $+\infty$

donc $R \geqslant +\infty$

et $\forall x \in]-\infty, +\infty[$,

$$S(x) = x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$= x \cdot e^x + e^x$$

$$= (x+1)\, e^x$$

M2 $$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)}{n!} x^n$$

Une primitive est

$$T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$$ de rayon $+\infty$

$$= x\, e^x$$ donc $R(S) = +\infty$

donc $S(x) = T'(x) = (x+1)e^x$

(d) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(n+1)}{(n+2)n!} x^n$

On note R le rayon de cv

Pour $x \in]-R, R[$,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)}{(n+2)\quad n!} x^n$$

idée 1 primitiver $x \sum \frac{x^{n+1}}{(n+2)\, n!}$

idée 2 CL

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+2)!} x^n$$

écrivons $(n+1)^2$ comme CL de

$(n+2)(n+1)$, $(n+2)$ et 1

$(n+2)(n+1) = n^2+3n+2$

avec $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$

$$= n^2 + 3n + 2 - (n+2) + 1$$

$$= (n+2)(n+1) - (n+2) + 1$$

Donc

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{(n+2)!} - \frac{(n+2)}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+2)!} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} \right) x^n$$

CL de 3 SE de rayon $+\infty$

donc $R(S) = +\infty$

et $\forall x \in]-\infty, +\infty[\setminus \{0\}$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + \frac{1}{x^2} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

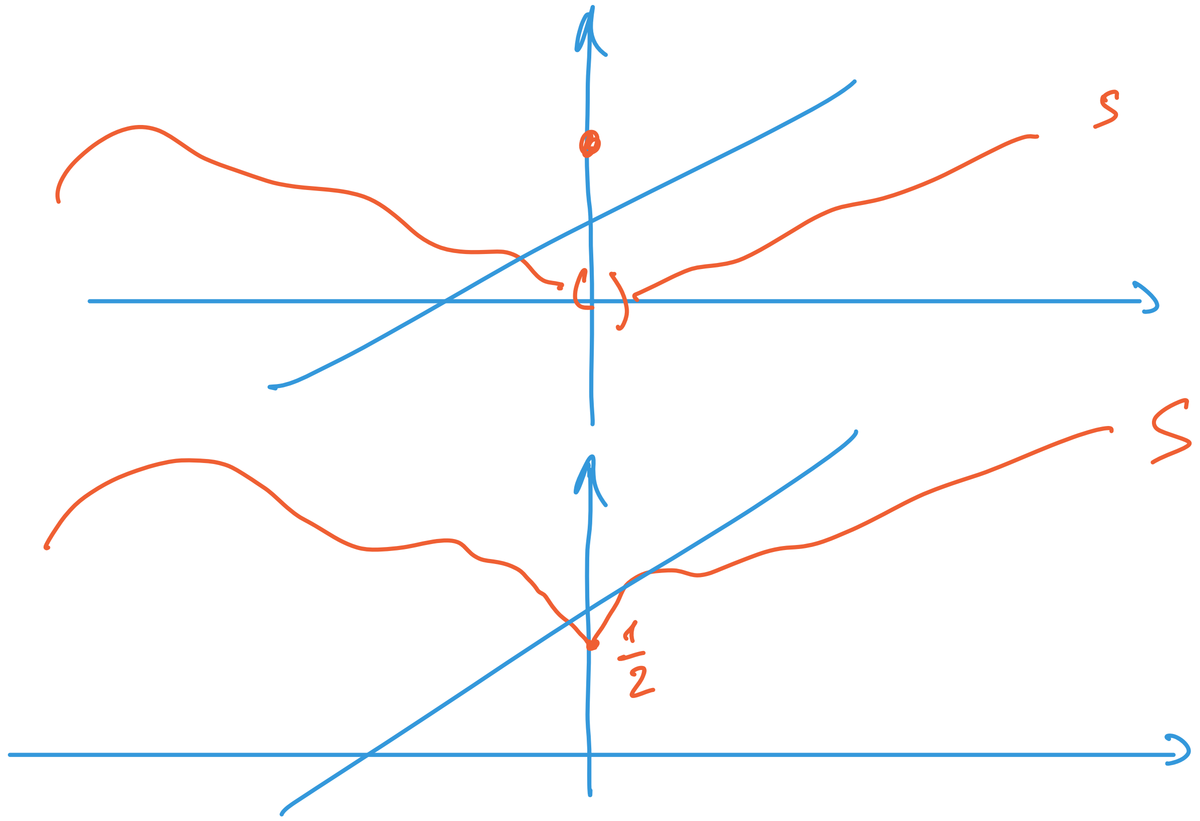
$$= e^x - \frac{1}{x}\left(e^x - 1\right) + \frac{1}{x^2}\left(e^x - 1 - x\right)$$

$$= \frac{e^x(x^2 - x + 1) - 1}{x^2}$$

Pour $x = 0$ $S(0) =$ le terme constant de la SE

$$= \frac{1}{2}$$

<u>Ccl</u> : $S(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{e^x(x^2 - x + 1) - 1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$



<u>Rmq</u> : S est somme d'une SE donc est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, +\infty[$

(e) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(2^n+3^n)x^n$

On reconnaît l'addition de 2 séries géométriques de rayons respectifs $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$, distincts donc $R = \frac{1}{3}$ et $\forall x \in]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(3x)^n$$

$$= \frac{1}{1-2x} + \frac{1}{1-3x}$$

(f) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$

où $a_{n+1} = 2a_n$ rel de réc satisfaite par $(a_n)_n$.

• On suppose $a_0 \neq 0$

Pour $x \in]-R, R[$:

$$\forall n \quad a_{n+1} = 2 a_n$$

$$\text{donc} \quad a_{n+1} x^{n+1} = 2 a_n x^{n+1}$$

donc, en sommant

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^{n+1}}_{= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = S(x) - a_0} = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} 2 a_n x^{n+1}}_{= 2x S(x)}$$

$$\text{donc} \quad S(x) - a_0 = 2x S(x)$$

$$\text{ie} \quad S(x)(1 - 2x) = a_0$$

donc $R \leq \frac{1}{2}$ (sinon $S(\frac{1}{2}) \times 0 = a_0 \neq 0$)

et $\forall x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\cap]-R, R[$

$$S(x) = \frac{a_0}{1 - 2x}$$

5 Séries géométrique et exponentielle d'une variable complexe

5.1 Série géométrique

Proposition. La série entière $\sum z^n$, appelée **série géométrique** de raison z, a pour rayon de convergence 1 et, pour tout $|z| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

5.2 Série exponentielle

Définition. La série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$, appelée **série exponentielle** a pour rayon de convergence $+\infty$. On appelle **exponentielle** sa somme, de sorte que, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z$$

Proposition. Pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}$$ (produit de Cauchy)

Proposition. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$$

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) = \mathrm{ch}(ix)$$

où $\mathrm{ch}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

$$\sin(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) = \frac{1}{i}\,\mathrm{sh}(ix)$$

$$\mathrm{ch}(x) = \cos\left(\frac{x}{i}\right) = \cos(-ix) = \cos(ix)$$

où $\cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

$$\mathrm{sh}(x) = i \sin\left(\frac{x}{i}\right)$$

$$= i \sin(-ix)$$

$$= -i \sin(ix)$$

$$\mathrm{ch}(a+b) = \cos(ia+ib)$$

$$= \cos(ia)\cos(ib) - \sin(ia)\sin(ib)$$

$$= \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) - \left(-\frac{1}{i}\right)\mathrm{sh}(a)\left(-\frac{1}{i}\right)\mathrm{sh}(b)$$

$$= \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b)$$