Pour lu : 207.2, 207.5, 207.16

Prochain DS : 3h ve 19 janvier, G024

Bracher - Laouny - Joncheray - Roblot

$\sum a_n x^n$ $\quad R$

$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ $\quad$ exprimer $S(x)$? $\longrightarrow \dots$

opérations

4 Développement en série entière en 0 d'une fonction d'une variable réelle

4.1 Développement en série entière d'une fonction

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ contenant 0.
On dit que f **est développable en série entière sur** $]-r, r[$ ou **admet un développement en série entière** si et seulement si $]-r, r[\subset I$ et il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geqslant r$ telle que :

$$\forall x \in]-r, r[, \; f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Remarque. *Souvent, on ne précise pas la valeur de $r > 0$, on dit simplement que f est développable en série entière* ***au voisinage de*** *0 ou* ***en*** *0.*

Remarque. *La fonction f peut être définie sur un intervalle plus grand que $]-R, R[$ ou $[-R, R]$.
En revanche, si f n'est pas continue en $x_0 \neq 0$, alors $R \leqslant |x_0|$.*

Proposition. Si f admet un développement en série entière au ~~voisinage de 0~~, alors il est unique.

Preuve : On suppose que f admet un DSE

ie $\exists (a_n)_n, r > 0$ tq

$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

Notons $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $x \in]-R, R[$ $\qquad R = R(\sum a_n x^n)$

On a vu : $\forall n, \quad a_n = \dfrac{S^{(n)}(0)}{n!}$

Or f et S coïncident sur $]-r, r[$, $\quad S^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$

donc le DSE de f est $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

Proposition. Soit f une fonction qui admet un développement en série entière $\sum a_n x^n$ au voisinage de 0.

- Si f est paire, son développement en série entière est pair : $\forall p,\ a_{2p+1} = 0$.
- Si f est impaire, son développement en série entière est impair : $\forall p,\ a_{2p} = 0$.

Preuve : On suppose f paire, et on suppose que f admet un DSE

$$\exists (a_n)_n \quad r>0 \quad tq \quad \forall x \in]-r,r[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n .$$

Posons $g(x) = f(x) - f(-x)$

$$\forall x \in]-r,r[\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} 0 \cdot x^n = 0 = g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (1-(-1)^n)\, x^n$$

Par l'unicité des coeff. d'une SE

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 = a_n (1 - (-1)^n)$$

ie $\begin{cases} 0 = a_{2p}(1-(-1)^{2p}) \\ 0 = a_{2p+1}(1-(-1)^{2p+1}) \end{cases}$

donc $\begin{cases} 0 = 0 \\ a_{2p+1} = 0 \end{cases}$

4.2 Série de Taylor d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ contenant 0. On suppose f de classe $\mathcal{C}^\infty$. On appelle **série de Taylor de f** la série entière :

$$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Là où cette série converge, on note $T_f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

Proposition. Si f admet un développement en série entière sur $]-r, r[$, alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et elle coïncide sur $]-r, r[$ avec la somme de sa série de Taylor :

$$\forall x \in \,]-r, r[, \; f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Remarque. *Attention ! Une fonction peut être $\mathcal{C}^\infty$ sans admettre de développement en série entière.*

Attention ! Une fonction peut admettre une série de Taylor convergente, sans pour autant coïncider avec la somme de cette série.

Exemple. La fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{array}$ prolongée par continuité en 0 admet-elle un développement en série entière au voisinage de 0 ?

On a vu que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall n \quad f^{(n)}(0) = 0$

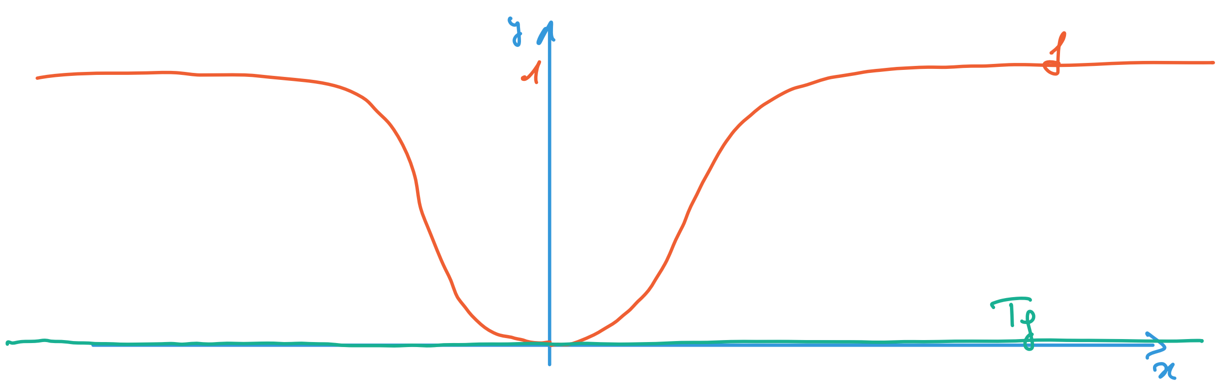
donc la série de Taylor de f est

$$\sum_{n\geq 0} \frac{0}{n!} x^n$$

de rayon de cv $+\infty$

et $\forall x \in \mathbb{R} \qquad T_f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{0}{n!} x^n$

$$= 0$$



Si f admet un DSE, $\exists\, r>0$ tq $\forall x \in]-r, r[\quad f(x) = T_f(x)$

ce n'est pas le cas.

Donc f n'admet pas de DSE.

4.3.2 Utilisation de la formule de Taylor avec reste intégral

Rappel : formule de Taylor avec reste intégral. Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I contenant 0, alors pour $x \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t}_{R_n(x)}$$

Preuve : par récurrence sur n.

- Pour f $\mathcal{C}^1$, $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt$

$$= f(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^0}{0!} f^{(1)}(t)\,dt$$

- On suppose la formule vraie pour $n \in \mathbb{N}$.

Soit alors f $\mathcal{C}^{n+2}$, donc en particulier $\mathcal{C}^{n+1}$

donc par HR

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

On effectue une int. par parties, avec $f^{(n+1)}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

$$\left.+ \left[\frac{(-)\,(x-t)^{n+1}}{(n+1)\; n!} f^{(n+1)}(t) \right]_0^x \right\} 0 + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0)$$

$$- \int_0^x \frac{(-)\,(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\, dt$$

D'où le résultat.

Proposition. Avec les notations précédentes, pour f de classe $\mathcal{C}^\infty$, f admet un DSE(0) si et seulement si $R_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ sur un voisinage (non vide) de 0.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt}_{R_n(x)}$$

Pour f $\mathcal{C}^\infty$, f admet un DSE

ssi $\exists r>0$ tq $\forall x \in]-r, r[$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

ie La série de Taylor cv et a pour somme $f(x)$.

ie le reste de Taylor tend vers 0.

Pour f $\mathcal{C}^\infty$, f admet un DSE

ssi son reste intégral tend vers 0.

Remarque. *C'est un résultat plutôt théorique. Même si on l'utilise dans l'exemple suivant, l'utilisation du formulaire du § 4.3.4 est plus efficace, comme c'est le cas dans la recherche de développements limités.*

Exemple. Montrer que la fonction exponentielle est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$\exp^{(k)}(t) = e^t$

exp est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc par la formule de Taylor avec reste-intégral :

$\forall n \in \mathbb{N}$
$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \exp^{(n+1)}(t)\,dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t\,dt}_{R_n(x)}$$

1er cas : $x > 0$

$$|R_n(x)| = \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t\,dt \right|$$

$$\leq \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t\,dt$$

$$\leq e^x \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,dt$$

$$= e^x \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^x$$

$$= e^x \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad (x \text{ fixé})$$

2e cas : si $x < 0$, notons $y = -x$

$$|R_n(x)| = \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \, dt \right|$$

$$\leq \int_x^0 \frac{|x-t|^n}{n!} e^t \, dt$$

$$= \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!} e^t \, dt$$

$$\leq e^0 \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!} \, dt$$

$$= e^0 \left[\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_x^0$$

$$= e^0 \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

CCl : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ie exp admet un DSE et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n .$$

4.3 Pour montrer qu'une fonction admet un développement en série entière en 0

4.3.1 Opérations sur les fonctions développables en séries entières

Proposition.

- Si f et g admettent des DSE qui sont respectivement $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$, alors $\lambda f + \mu g$ admet un DSE qui est :
$$\sum (\lambda a_n + \mu b_n) x^n$$
Le rayon de convergence a été précisé précédemment.

- Si f et g admettent des DSE qui sont respectivement $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$, alors fg admet un DSE qui est le produit de Cauchy des DSE de f et g :
$$\left(\sum a_n x^n\right)\left(\sum b_n x^n\right)$$
Le rayon de convergence a été précisé précédemment.

$\sum c_n x^n$

- Si f admet un DSE qui est $\sum a_n x^n$, alors f est dérivable, f' admet un DSE qui est :
$$\sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1}$$
Les rayons de convergences sont égaux.

- Si f admet un DSE qui est $\sum a_n x^n$, alors les primitives de f admettent un DSE qui sont :
$$K + \sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$
Les rayons de convergences sont égaux.

Exemples:

- est-ce que ch est DSE ?

$\forall x \in \mathbb{R},\quad \mathrm{ch}(x) = \frac{1}{2}e^{x} + \frac{1}{2}e^{-x}$

est CL de 2 fonction qui admettent un DSE de rayons infinis

donc ch admet un DSE de rayon $+\infty$

et $\quad ch(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2}\frac{1}{n!} + \frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{n!}\right)}_{\text{nul pour } n \text{ impair}} x^n$

$$\boxed{= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p)!} x^{2p} \qquad R=+\infty}$$

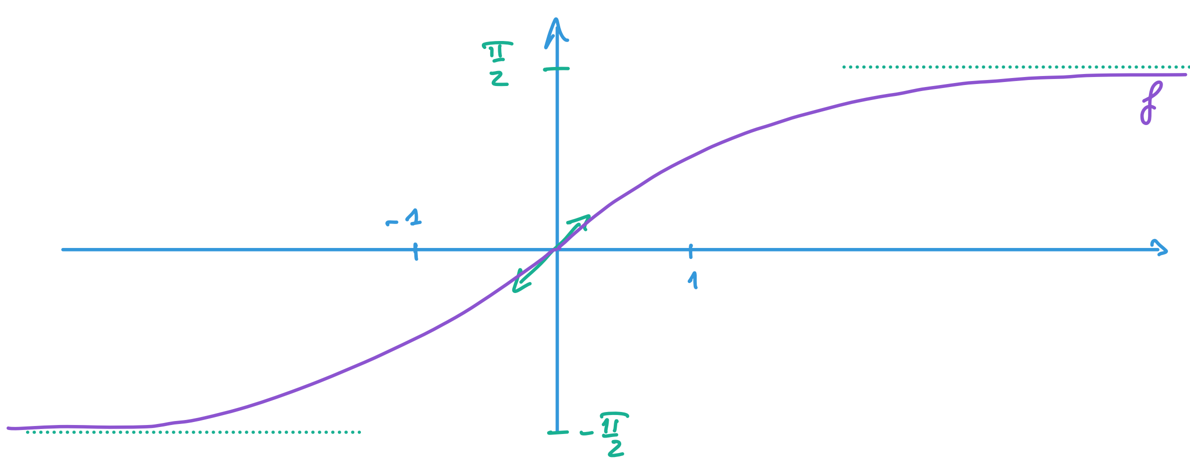
De même:

$$\boxed{sh(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)!} x^{2p+1} \qquad R=+\infty}$$

Autre exemples:

- Montrer que Arctan admet un DSE

Notons $f(x) = \mathrm{Arctan}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.



$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

On connait $\sum_{n=0}^{+\infty} u^n = 1 \cdot \frac{1}{1-u} \quad$ pour $|u| < 1$

(pour $x \in]-1,1[$

$$f'(x) = \frac{1}{1-(-x^2)}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} \quad \text{de Rayon } 1$$

Par primitivation, Arctan admet un DSE de rayon 1

et $\forall x \in]-1,1[$

$$f(x) = \underbrace{f(0)}_{=0} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

On a donc $\boxed{\operatorname{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad R=1}$

Notons $S(x)$ la somme de la SE

$R=1$ donc $D_S =]-1,1[$

ou $[-1,1]$

ou $[-1,1[$

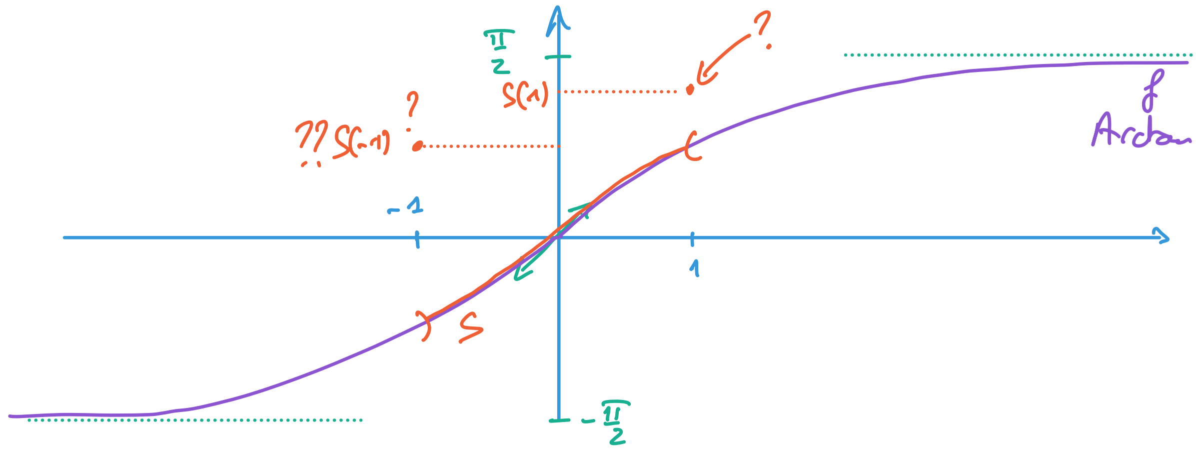
ou $]-1,1]$

Pour $x=1$, $\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$ cv par T.S.S.A.

Pour $x=-1$, $\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}$ cv par T.S.SA.

Donc S est défini sur $[-1, 1]$

On sait que S coïncide avec Arctan sur $]-1, 1[$



$\longrightarrow$ cf $\underline{207.2}$

4.3.3 Utilisation d'une équation différentielle

Exemple. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière sur $]-1,1[$, et que pour tout $x \in]-1,1[$:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

Remarque. *Lorsque α est un entier naturel, la fonction est un polynôme et sont développement en série entière est obtenu par la formule du binôme, et est valable sur $\mathbb{R}$.*

On note $f(x) = (1+x)^\alpha$ $\qquad \alpha \in \mathbb{R}, \ \alpha \neq 0$

$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$

donc f est la sol de l'éq. diff. $\begin{cases} (1+x)y' - \alpha y = 0 \ (E) \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Est-ce que f admet un DSE ?

↳ Est-ce que (E) admet des sol DSE ?

$\boxed{\text{Analyse}}$ Soit $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

somme d'une SE de rayon $R>0$

Alors $\forall x \in]-R,R[$

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

g sol de $\begin{cases} \text{CI } g(0)=1 \\ (E) \text{ sur }]-R,R[\end{cases}$

$\iff \forall x \in]-R,R[\quad \begin{cases} g(0)=1 \\ (1+x)g'(x) - \alpha g(x) = 0 \end{cases}$

$\iff \forall x \in]-R,R[\quad \begin{cases} g(0)=1 \\ (1+x) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \forall x \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha a_n x^n = 0$$

glissements d'indice

$$\Leftrightarrow \forall x \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{\cancel{n=1}}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha a_n x^n = 0$$

$n=0$

$$\Leftrightarrow \underset{\substack{\Uparrow \\ ]-R,R[\\ R\neq 0}}{\forall x} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(n+1) a_{n+1} + (n-\alpha) a_n \right] x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{n} 0 \, x^n$$

unicité des coeff d'une SE

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad (n+1) a_{n+1} + (n-\alpha) a_n = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall n \quad \begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{(\alpha - n)}{(n+1)} a_n \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \forall n \quad a_n = \frac{\alpha - (n-1)}{n} \cdot \frac{\alpha - (n-2)}{n-1} \cdots \frac{(\alpha - 1)}{2} \frac{\alpha}{1} a_0 \; 1$$

par récurrence

$$\Leftrightarrow \forall n \quad a_n = \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha - n+1)}{n!} a_0 \; 1$$

$\boxed{\text{Synthèse}}$ Posons $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$

Par les équivalences précédentes, g sol de (E) et $g(0) = 1$

Reste à calculer le rayon de cv de g.

Si $\alpha \notin \mathbb{N}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\alpha - n}{n+1}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

donc $R=1$ par la règle de d'Alembert

(Si $\alpha \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$ à partir d'un certain rang)

donc $R=1$

<u>CCl</u> : $\begin{cases} (E) \\ y(0)=1 \end{cases}$ admet une solution DSE qui est g de rayon 1

admet pour sol $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$

Donc $\boxed{\begin{array}{l} \forall x \in \,]-1,1[\quad (1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \\ R = 1 \end{array}}$

4.3.4 Formulaire

Les développements issus de l'exponentielle (Rayon $+\infty$).

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{pour tout } x \in]-\infty, +\infty[$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Formule de Taylor reste intégrale

ou EDL 2 $y'' + y = 0$

ou : $\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$

Les développements issus de la série géométrique, de $(1+x)^\alpha$ (Rayon 1).

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \qquad \text{pour tout } x \in]-1, 1[$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \qquad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

$$\operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

à retrouver rapidement.

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n \qquad R = 1$$

$$\frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (2x)^n \qquad R = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1 + (-x^2)\right)^{-1/2} \qquad R = 1$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} (-1)^n x^{2n}$$

$$\frac{1 \times 3 \times \cdots \times 2n-1}{2^n n!} (-1)^n (-1)^n x^{2n}$$

Remarque. *Notons que la fonction* Arctan *est définie sur* $\mathbb{R}$, *mais son développement en série entière sur* $]-1,1[$ *(ou peut-être* $[-1,1]$, *mais pas plus).*