Pour jé : 207.8 , 207.10

1.3 Détermination pratique du rayon de convergence

1.3.1 Quelques situations fréquentes

La connaissance de la convergence pour certaines valeurs de z nous renseigne souvent suffisamment pour déduire la valeur de R. Précisons :

Proposition.

disque fermé de rayon R.

- Si pour un $z_0 \in \mathbb{C}$, $\sum a_n z_0^n$ est convergente, alors $z_0 \in \overline{D(0,R)}$ i.e. $R \geqslant |z_0|$.
- Si pour un $z_0 \in \mathbb{C}^*$, $\sum a_n z_0^n$ n'est pas absolument convergente, alors $z_0 \notin D(0,R)$ i.e. $R \leqslant |z_0|$.
- Si pour un $z_0 \in \mathbb{C}$, $\sum a_n z_0^n$ est semi-convergente, alors $z_0 \in C(0,R)$ i.e. $R = |z_0|$.

Remarque. *En pratique, on applique souvent la proposition précédente avec z_0 réel.*

Proposition.

- Si pour un $\rho > 0$, $(a_n \rho^n)_n$ est bornée, alors $R \geqslant \rho$.
- Si pour un $\rho > 0$, $(a_n \rho^n)_n$ n'est pas bornée, alors $R \leqslant \rho$

Exemple. On note a_n le n-ième chiffre de l'écriture décimale de $\sqrt{2}$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

$a_0 = 1$
$a_1 = 4$
$a_2 = 1$
$a_3 = 4$
$\vdots$

$a_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$

$(a_n 1^n)_n$ est bornée donc $1 \leq R$

$a_n 1^n \underset{n \to +\infty}{\not\longrightarrow} 0$ donc $\sum a_n 1^n$ diverge grossièrement

donc $R \leq 1$

donc $R = 1$

1.3.3 Rayon de $\sum n a_n z^n$

Proposition. Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

Remarque. *On en déduit que les séries $\sum n^2 a_n z^n$, $\sum \frac{a_n}{n} z^n$ etc. ont toutes le même rayon de convergence que $\sum a_n z^n$.*

Voir aussi au § 3.4 le théorème de dérivation terme à terme des séries entières.

preuve: Notons $R = R(\sum a_n z^n)$

$R' = R(\sum n a_n z^n)$

- $\forall n \geq 1 \quad |a_n z^n| \leq |n a_n z^n|$

donc pour $|z| < R'$, $\sum n a_n z^n$ converge absolument

donc $\sum a_n z^n$ cv abs par majoration

donc $|z| \leq R$

Bref: $\forall |z| < R'$, on a $|z| \leq R$

donc $R' \leq R$

- Mque $R \leq R'$

On suppose $R \neq 0$ (sinon l'inégalité est triviale)

Soit z tq $|z| < R$ ~~donc $\sum a_n z^n$ cv absolument~~.

prenons ρ tq $|z| < \rho < R$

$\left(\text{par ex } \rho = \dfrac{|z|+R}{2}\right)$

Comme $\rho < R$ $\quad (a_n \rho^n)_n$ bornée, $|a_n \rho^n| \leq M$

$$|n a_n z^n| = |a_n \rho^n| \; n \left|\frac{z}{\rho}\right|^n$$

Même raisonnement que pour le lemme d'Abel

$$\leq M . \; n . \left|\frac{z}{\rho}\right|^n \quad \text{avec } \left|\frac{z}{\rho}\right| < 1$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

par comparaison de suite géom et n.

donc $|z| \leq R'$

Ainsi, on a montré que $\forall |z| < R$, on a $|z| \leq R'$

et donc $R \leq R'$

$$R\left(\sum a_n z^n\right) = R\left(\sum n a_n z^n\right) = R\left(\sum n^2 a_n z^n\right)$$

$$\shortparallel \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad$$

$$R\left(\sum \frac{1}{n} a_n z^n\right) \qquad = R\left(\sum n^k a_n z^n\right)$$

Remarque : pas de résultat dans le cours sur $R\left(\sum \sqrt{n}\, a_n z^n\right)$

$\longrightarrow$ comparer à $R\left(\sum a_n z^n\right)$ et $R\left(\sum n a_n z^n\right)$

1.3.2 Comparaison asymptotique et rayon de convergence

Proposition. Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières, R_a et R_b leurs rayons de convergence respectifs.

- Si $a_n = \mathrm{O}(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$. (vrai aussi si $a_n = o(b_n)$)
- Si, à partir d'un certain rang, $|a_n| \leqslant |b_n|$, alors $R_a \geqslant R_b$.
- Si $|a_n| \sim |b_n|$, alors $R_a = R_b$.

On suppose $a_n = O(b_n)$

pour $z \neq 0$ $\quad a_n z^n = O(b_n z^n)$

si $|z| < R_b$ $\quad \sum b_n z^n$ cv absolument

donc $\sum a_n z^n$ cv absolument par comparaison

donc $|z| \leq R_a$

Comme c'est vrai $\forall |z| < R_b$, on a $R_b \leq R_a$

<u>Remarque</u> on a donc $R(\sum \sqrt{n}\, a_n z^n) = R(\sum a_n z^n)$

(à redémontrer)

<u>en effet</u>: $\forall n \geq 1$ $\quad |a_n| \leq \sqrt{n}\,|a_n| \leq n\,|a_n|$

donc $R(\sum a_n z^n) \geq R(\sum \sqrt{n}\, a_n z^n) \geq R(\sum n\, a_n z^n)$

égaux

Exemple. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum \frac{z^n}{n^2+n+1} \qquad\qquad \sum \ln(1+n) z^n$$

Remarque. *On aura, au § 4.3.4, un formulaire donnant le rayon de convergence des développements en série entière de référence.*

- On note $a_n = \dfrac{1}{n^2+n+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$

donc $R\left(\sum a_n z^n\right) = R\left(\sum \frac{1}{n^2} z^n\right)$ par équivalent

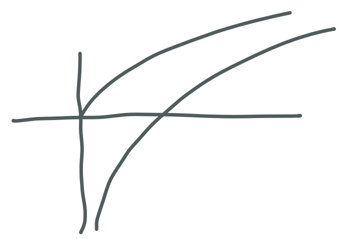
$= R\left(\sum z^n\right)$ § 133

$= 1$ série géométrique.

- On note $b_n = \ln(1+n)$

$= \ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$\underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$



$\sum \ln(n) z^n$

On a : $\forall n \quad 1 \leq \ln(1+n) \leq n$ (au voisinage de $+\infty$)

donc $\underbrace{R\left(\sum z^n\right)}_{=1} \geq R\left(\sum b_n z^n\right) \geq \underbrace{R\left(\sum n z^n\right)}_{= R\left(\sum z^n\right) = 1}$

donc $R\left(\sum b_n z^n\right) = 1$

2 Opérations sur les séries entières

2.1 Loi externe

Proposition. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.
Pour $\lambda \neq 0$, $\sum \lambda a_n z^n$ a pour rayon de convergence R et, pour tout z tel que $|z| < R$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

2.2 Somme de deux séries entières

Proposition. Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières, R_a et R_b leurs rayons de convergence respectifs.

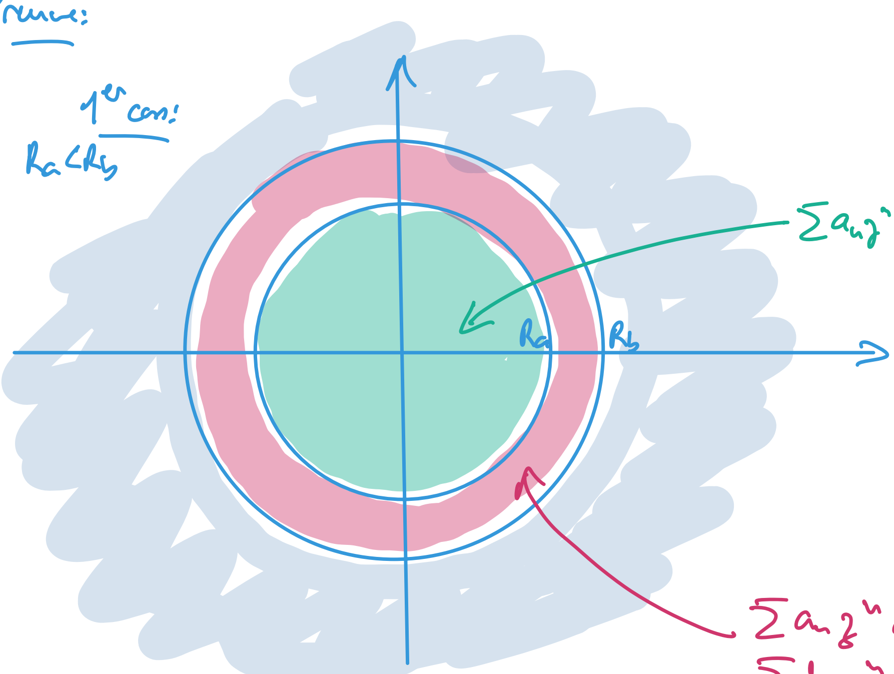
- Si $R_a < R_b$ alors $\sum (a_n + b_n) z^n$ a pour rayon de convergence $R = R_a < R_b$
- Si $R_a = R_b$ alors le rayon de convergence de $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie $R \geqslant R_a = R_b$

Dans tous les cas, pour $|z| < \text{Min}(R_a, R_b)$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

Preuve:

1^{er} cas: $R_a < R_b$



$\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ cv abs

$\sum a_n z^n$ div grossièrement
$\sum b_n z^n$ cv abs

Pour $|z| < R_a < R_b$ $\quad \sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ cv abs

donc $\sum (a_n + b_n) z^n$ cv absolument donc $R_{a+b} \geq R_a$

Pour $R_a < |z| < R_b$ $\quad \sum a_n z^n$ diverge grossièrement

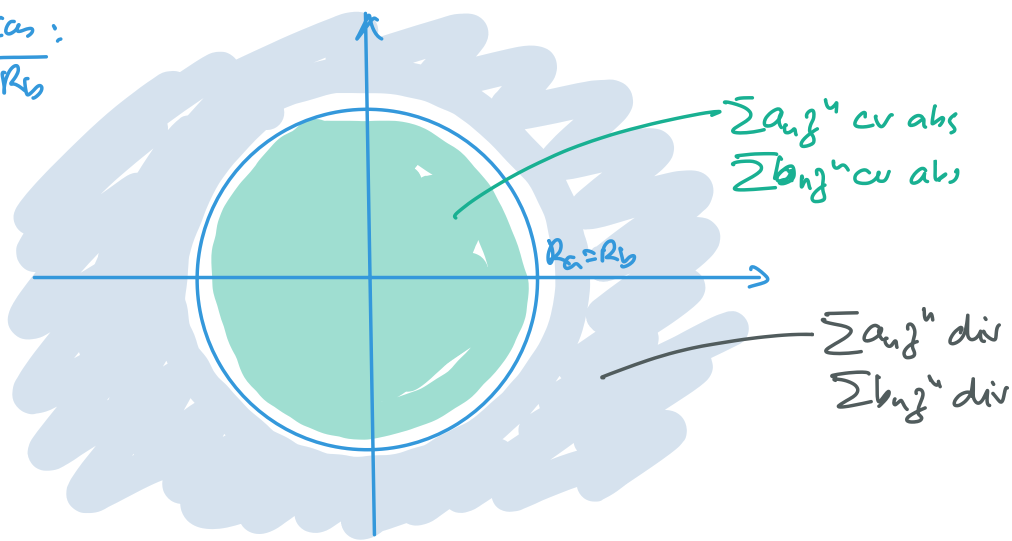
$\sum b_n z^n$ converge absolument

donc $\sum (a_n+b_n) z^n$ diverge grossièrement

donc $R_{a+b} \leq |z|$ pour tout $|z| > R_a$

donc $R_{a+b} \leq R_a$

2e cas :
$R_a = R_b$



Pour $|z| < R_a = R_b$ $\quad \sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ cv abs

donc $\sum (a_n + b_n) z^n$ aussi

donc $R_{a+b} \geq |z|$ $\forall |z| < R_a = R_b$

donc $R_{a+b} \geq R_a = R_b$

Par exemple : avec $a_n = 1$ et $b_n = -1 + \frac{1}{n}$

$R(\sum a_n z^n) = 1$ $\qquad R(\sum b_n z^n) = 1$

$a_n + b_n = \underset{\frac{1}{n}}{0}$ $\qquad R(\sum 0 z^n) = +\infty$ $= 1$

2.3 Produit de Cauchy

Définition. Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières. On définit leur **produit de Cauchy** comme étant la série entière $\sum c_n z^n$ où :

$$\forall n,\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{i+j=n} a_i b_j$$

Remarque. *Cela correspond, à z fixé, au produit de Cauchy des séries numériques.*

Proposition. Soit R_a et R_b les rayons de convergence respectifs de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$, et R_c le rayon de convergence de $\sum c_n z^n$ leur produit de Cauchy. Alors :

$$R_c \geqslant \mathrm{Min}(R_a, R_b)$$

et pour tout $|z| < \mathrm{Min}(R_a, R_b)$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$$

Remarque: dès que l'on fait un produit de Cauchy, on définit complètement $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$
en particulier si l'une des séries est indexée par $n \geqslant 1$ ou si des termes sont nuls.

Exemple. Effectuer le produit de Cauchy de $\sum z^n$ avec elle-même.

Notons $a_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$b_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$R(\sum z^n) = 1$

On effectue le produit de Cauchy de $\sum a_n z^n$ par $\sum b_n z^n$.

On définit $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

$$= \sum_{k=0}^{n} 1 \cdot 1$$

$$= n+1$$

On sait que $R(\sum c_n z^n) \geq 1$

(ici, il est en fait $= 1$)

et on a : $\forall |z| < 1$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right)^2$$

$$= \frac{1}{(1-z)^2}$$

Exemple 2 : On donne : $\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Écrire $\frac{1}{1-x} \operatorname{ch} x$ comme somme d'une S.E.

Bref, on fait le produit de Cauchy de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad \text{par} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

$$1 + 0x + \frac{x^2}{2!} + 0x^3 + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

On pose $a_n = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum a_n x^n = \sum x^n = \frac{1}{1-x}$$

On pose :

$\cancel{b_n =}$

On pose $\begin{cases} b_{2p} = \dfrac{1}{(2p)!} \\ b_{2p+1} = 0 \end{cases}$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \sum_{p=0}^{+\infty} b_{2p} x^{2p}$$

On effectue le produit de Cauchy.

On pose :

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$$

$$= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair} \\ k=2p \\ p\in\{0,\dots,\lfloor \frac{n}{2}\rfloor\}}}^{n} a_{n-k} b_k + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} a_{n-k} b_k$$

$$= \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} 1 \cdot \frac{1}{(2p)!} + 0$$

Ainsi $\forall x \in]-1,1[$

$$\frac{1}{1-x} \cdot \operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

$$\text{où } c_n = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{(2p)!}$$

3 Régularité de la somme

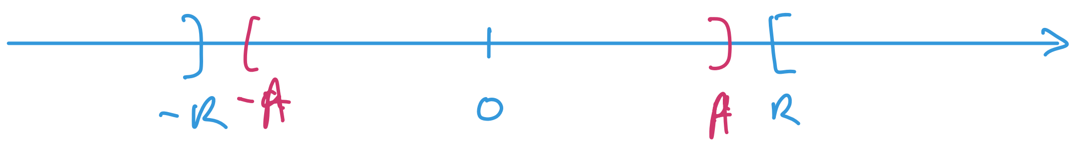
3.1 Mode de convergence des séries entières réelles

On s'intéresse à une série entière de variable réelle $\sum a_n x^n$ et on note R son rayon de convergence.

Remarque. *On a déjà dit la convergence simple sur l'intervalle ouvert de convergence* $]-R, R[$.

Théorème.

$\boxed{\sum a_n x^n \text{ converge normalement sur tout segment } [-a, a] \subset]-R, R[.}$



On note $f_n(x) = a_n x^n$

Pour $x \in [-A, A] \subset]-R, R[$

$$|f_n(x)| = |a_n x^n|$$

$$\leq |a_n A^n|$$

indép de x

Tg série convergente

car $A \in]-R, R[$

donc $\sum f_n$ cv normalement sur $[-A, A]$.

3.2 Continuité de la somme des séries entières

Théorème.

> Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.
> Sa somme $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$.

S

Remarque. *L'étude de la continuité en $\pm R$ se fait au cas par cas, en utilisant les théorèmes du chapitre 206.*
On dispose plus généralement du résultat suivant :

Proposition. Si $\sum a_n z^n$ est une série entière de variable complexe, de rayon de convergence R, alors sa somme est continue sur le disque ouvert de convergence.

Preuve. Résultat admis. □

Preuve:

tt f_n est continue sur $]-R, R[$

$\sum f_n$ cv normalement, donc uniformément

sur tout $[-A, A] \subset]-R, R[$

donc par transfert de continuité,

S est continue sur tout $[-A, A] \subset]-R, R[$

donc sur $]-R, R[$.

3.3 Primitives/intégrales de la somme des séries entières réelles

Proposition. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.
Pour tout $[a,b] \subset]-R,R[$:

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n \int_a^b t^n \, \mathrm{d}t \right)$$

Preuve : On note $f_n(t) = a_n t^n$

- $[a,b] \subset]-R,R[$ est un segment
- les f_n sont continues
- $\sum f_n$ cv normalement, donc unif sur $[a,b]$

donc

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \underbrace{\int_a^b t^n\,dt}_{\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_a^b}$$

en particulier avec $[a,b] = [0,x]$ où $|x| < R$

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x a_n t^n\,dt$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

la primitive de S qui s'annule en 0.

Corollaire. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Une primitive de sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $]-R, R[$ est :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{(n+1)} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$$

qui est obtenue par primitivation terme à terme. Son rayon est R.

$$\frac{a_n}{n+1} \sim \frac{a_n}{n} \quad \text{donc} \quad R\left(\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}\right) = R\left(\sum \frac{a_n}{n} x^n\right) = R\left(\sum a_n x^n\right) = R$$

Exemple. Primitiver $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

Il s'agit d'une SE de rayon 1 et :

$$\forall x \in]-1, 1[\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Par primitivation terme à terme :

$$\forall x \in]-1, 1[\quad 0 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x)$$

On a donc : $\boxed{-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \qquad R = 1}$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \qquad R = 1$$

3.4 Dérivabilité de la somme des séries entières réelles

Théorème.

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.
Sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$.
De plus, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

Preuve: On note $f_n(x) = a_n x^n$

- $\sum f_n$ cv simplement sur $]-R, R[$
- les f_n sont $\mathcal{C}^1$ sur $]-R, R[$

  et $f_n'(x) = n a_n x^{n-1}$ $\forall n \geq 1$
- Mq $\sum f_n'$ cv uniformement sur tout $[-A, A] \subset]-R, R[$

$$R\left(\sum n a_n x^{n-1}\right) = R\left(\sum a_n x^{n-1}\right) = R\left(\sum a_n x^n\right) = R$$

donc $\sum f_n'$ cv normalement sur tout $[-A, A] \subset]-R, R[$

Donc S est $\mathcal{C}^1$ sur tout $[-A, A] \subset]-R, R[$

donc $\mathcal{C}^1$ sur $]-R, R[$

et $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$

Remarque Attention au terme constant, il disparaît en dérivant.

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, a_{n+1}\, x^n$$

Corollaire. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$.

De plus, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$\begin{aligned} S^{(k)}(x) &= \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n x^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+k)(n+k-1)\dots(n+1) a_{n+k} x^n \end{aligned}$$

$$\frac{(n+k)!}{n!}$$

Exemple. On considère $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, calculer $f'(x)$ et en déduire l'expression de $f(x)$.

- f est la somme d'une série entière

  $\forall x \in \mathbb{R} \quad \left|\frac{x^n}{n!}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $R = +\infty$

  donc f $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[= \mathbb{R}$

- $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!}$

$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

$f'(x) = 0 + 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$= f(x)$$

Ainsi $f(x)$ est sol de l'ED $y' = y$

avec $f(0) = 1$

Donc $f(x) = e^x$

Exemple. Montrer que $g : x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \neq 0,$

$$g(x) = \frac{1}{x}\left(e^x - 1\right) = \frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - 1\right) = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$$

On pose $g(0) = 1$

On a donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$

donc g est $\mathcal{C}^\infty$ comme somme de série entière de rayon infini.

Remarque :
$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad R = +\infty}$$

Proposition. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et S sa somme.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \dfrac{S^{(n)}(0)}{n!}$.

Preuve: $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \forall x \in]-R, R[$

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\, a_n x^{n-k}$$

donc $S^{(k)}(0) =$ le terme constant (pour $n=k$)

$$= k(k-1)\cdots(1)\, a_k$$

Bref: $a_k = \dfrac{S^{(k)}(0)}{k!}$

Corollaire (Unicité des coefficients d'une série entière). Soit $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons respectifs R_a et R_b. On suppose que leurs sommes coïncident sur un intervalle ouvert non vide :

$$\exists \rho,\ 0 < \rho < \mathrm{Min}(R_a, R_b) \text{ t.q. } \forall t \in]-\rho, \rho[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n$$

Alors les séries entières sont identiques :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n$$