Pour moi : 104.18, 104.21 bc, 104.24

Séries entières

1 Rayon de convergence

1.1 Définitions

Définition. On appelle **série entière** toute série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe a_n tel que $f_n : x \mapsto a_n x^n$.

Remarque. *Les a_n déterminent complètement la série entière.*

Lorsque $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ n'est définie qu'à partir d'un certain rang, on convient que les premiers termes sont nuls, et on note $\sum\limits_{n\geqslant n_0} a_n x^n$ la série entière associée.

Convention. Lorsque la variable est réelle, on la note x et $\sum a_n x^n$ est la **série entière de variable réelle** x.

Lorsque la variable est complexe, on la note z et $\sum a_n z^n$ est la **série entière de variable complexe** z.

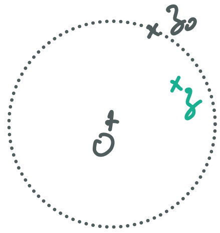
abs. $\sum a_n x^n$ $\qquad \sum (x \mapsto a_n x^n)$

définie pour x tq $\sum a_n x^n$ cv

1.2 Convergence d'une série entière

Lemme d'Abel.

> Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_n$ soit bornée.
> Alors, pour tout z tel que $|z| < |z_0|$, la série numérique $\sum a_n z^n$ converge absolument.



z_0 tq la suite $(a_n z_0^n)_n$ bornée

$\sum a_n z^n$ cv abs.

Preuve : Notons M tq $\forall n \quad |a_n z_0^n| \leq M$

Alors $|a_n z^n| \leq M \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$

tg série géom de raison < 1

donc $\sum a_n z^n$ cv absolument.

Remarque. *Ainsi, si $(a_n z_0^n)_n$ est bornée, alors $\sum a_n z^n$ converge absolument sur le disque ouvert $D(O, |z_0|)$.*

Définition. On appelle **rayon de convergence** d'une série entière la quantité :

$$R = \text{Sup}\,\{\rho \in \mathbb{R}_+ \text{ t.q. } (a_n \rho^n)_n \text{ est bornée}\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

$E = \{\rho \in \mathbb{R}_+ \text{ tq } (a_n \rho^n)_n \text{ bornée}\}$

est une partie de $\mathbb{R}$,

non vide (contient 0)

majorée ou non majorée

admet une borne sup

on note $+\infty$ son "sup".

Exemple. Donner un exemple de série entière dont le rayon de convergence est infini (resp. nul, resp. égal à 1).

<u>Exemple 1</u> $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} z^n$

on a $\forall \rho \geq 0 \quad \frac{1}{n!}\rho^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $\left(\frac{1}{n!}\rho^n\right)_n$ est bornée

Ici, $E = \mathbb{R}_+$ donc $R = +\infty$

<u>Exemple 2:</u> $\sum_{n\geq 0} 1 . z^n$

pour $\rho \geq 0$ $(1.\rho^n)_n$ bornée <u>ssi</u> $\rho \leq 1$

donc $E = [0, 1]$

donc $R = 1$

<u>Exemple 3:</u> $\sum_{n\geq 0} n^n z^n$

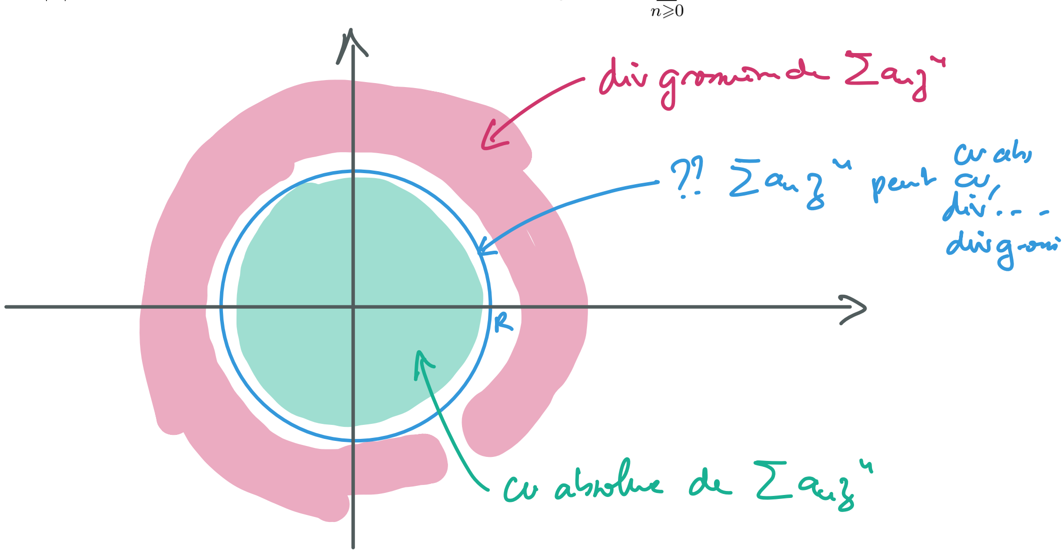
pour $\rho > 0$ $(n^n \rho^n)_n$ non bornée

donc $E = \{0\}$

donc $R = 0$

Proposition. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, et R son rayon de convergence. Pour $z \in \mathbb{C}$, on a :

- Si $|z| < R$, alors $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument.
- Si $|z| > R$, alors $(a_n z^n)_n$ n'est pas bornée et $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ diverge grossièrement.
- Si $|z| = R$, on ne peut rien dire concernant la convergence de $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$



- Soit z tq $|z| < R$, alors $|z|$ n'est pas un majorant de E
  donc $\exists \rho \in E$ tq $|z| < \rho \leq R$
  donc par le lemme d'Abel, $\sum a_n z^n$ cv absolument.
- Soit z tq $|z| > R$, alors $|z| \notin E$
  donc $(a_n z^n)_n$ non bornée donc $\sum a_n z^n$ div grossièrement.
- Pour $|z| = R \longrightarrow$ cf exemple

Proposition.

- $R = 0$ si et ssi $\sum a_n z^n$ ne converge que pour $z = 0$.
- $R = +\infty$ si et ssi $\sum a_n z^n$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$.
- $\sum a_n z^n$ et $\sum |a_n| z^n$ ont le même rayon de convergence.

Définition. Pour une série entière complexe de rayon R, on appelle **disque ouvert de convergence** :

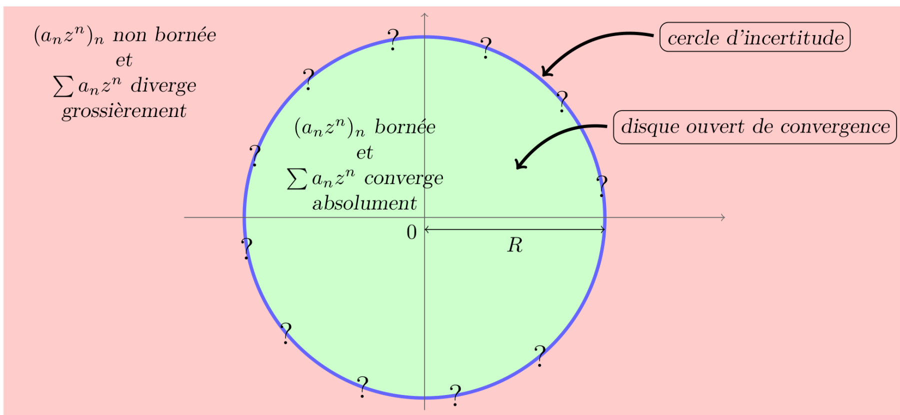
$$D(0,R) = \{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } |z| < R\}$$

et on définit sur $D(0,R)$ la **somme** de la série entière : $\begin{array}{rccl} S : & D(0,R) & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{array}$

Le cercle $C(0,R)$ s'appelle le **cercle d'incertitude**.

Rmq pour $|z|=R$ et $\sum a_n z^n$ cv, on note aussi $S(z)$ sa somme.

Interprétation graphique dans le cas $\sum a_n z^n$.



Définition. Pour une série entière réelle de rayon R, on appelle **intervalle ouvert de convergence** :

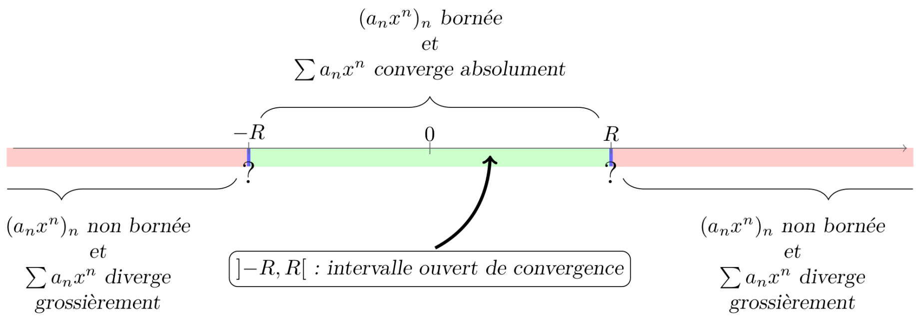
$$]-R, R[= \{x \in \mathbb{R} \text{ t.q. } |x| < R\}$$

et on définit sur $]-R, R[$ la **somme** de la série entière :

$$\begin{array}{rccl} S : &]-R, R[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array}$$

et éventuellement en $\pm R$ si $\begin{cases} \sum a_n R^n \text{ cv} \\ \sum a_n (-R)^n \text{ cv} \end{cases}$

Interprétation graphique dans le cas $\sum a_n x^n$.



Exemple. Étudier la convergence en $z = 1$ et $z = -1$ des séries entières suivantes :

$$\sum z^n \qquad\qquad \sum \frac{z^n}{n} \qquad\qquad \sum \frac{z^n}{n^2}$$

Quels sont les rayons de convergence de ces trois séries entières ?

- $\sum z^n$

Pour $z=1$, $\sum 1^n$ diverge (donc 1 n'est pas vert)

donc $R \leq 1$

Pour $z=1$ $(1^n)_n$ est bornée (donc 1 n'est pas rouge)

donc $R \geq 1$

donc $R=1$

- $\sum \frac{z^n}{n}$

Pour $z=1$, $\sum \frac{1^n}{n}$ diverge (donc 1 n'est pas vert)

donc $R \leq 1$

$\sum \frac{1^n}{n}$ ne diverge pas grossièrement

donc 1 n'est pas rouge

donc $R \geq 1$

Pour $z=-1$ $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge, mais pas absolument

donc (-1) n'est pas rouge ni vert

donc $R=|-1|=1$

- $\sum \frac{z^n}{n^2}$

pour $z=1$ $\quad \sum \frac{1^n}{n^2}$ cv absolument

donc 1 n'est pas rouge donc $R \geq 1$

pour $|z|>1$, $\quad \frac{z^n}{n^2} \longrightarrow +\infty$

donc z n'est pas vert donc $R \leq |z|$

ceci pour tout $|z| \geq 1$ donc $R \leq 1$