5 Formes linéaires sur un espace euclidien

5.1 Représentation des formes linéaires

Théorème de représentation des formes linéaires. dim finie

Soit φ une forme linéaire sur un espace euclidien E. Alors il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que :

$$\forall x \in E,\ \varphi(x) = \langle a, x \rangle$$

En d'autres termes, en dimension finie, toute forme linéaire peut être représentée à l'aide d'un produit scalaire.

$$\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \varphi(x)$$

$\exists!\, a \in E$ tq $\forall x \in E$ $\varphi(x) = \langle a, x \rangle$

Rmq: $x \longmapsto \langle a, x \rangle$ est une forme linéaire

Preuve: • 1er cas: Si $\varphi = 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})}$

synthèse alors $a = 0$ convient $\forall x \in E$ $\langle 0, x \rangle = 0 = \varphi(x)$

analyse Si a convient, alors $0 = \varphi(a) = \langle a, a \rangle$

donc $a = 0$

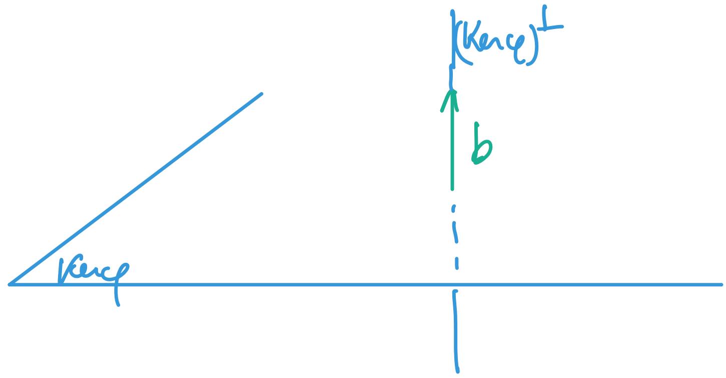
• 2e cas Si $\varphi \neq 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})}$ $\quad \varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \varphi(x)$

Th du rang avec $\operatorname{Im}\varphi \subset \mathbb{R}$, $\operatorname{Im}\varphi \neq \{0\}$

donc $\operatorname{Ker}\varphi$ de dim $n-1$

donc $\operatorname{Ker}\varphi$ est un hyperplan de E

donc $(\operatorname{Ker}\varphi)^\perp$ est une droite vecto $\operatorname{Vect}(b)$



<u>Analyse</u> : On suppose $\exists a \in E$ tq $\forall x \in E$ $\varphi(x) = \langle a, x \rangle$

- Pour $x \in \mathrm{Ker}\,\varphi$ $\quad 0 = \langle a, x \rangle$

  donc $a \in (\mathrm{Ker}\,\varphi)^\perp = \mathrm{Vect}(b)$

  donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $a = \lambda b$

- De plus
$$\varphi(b) = \langle a, b \rangle = \langle \lambda b, b \rangle = \lambda \|b\|^2$$

  donc $\lambda = \dfrac{\varphi(b)}{\|b\|^2}$

<u>On a montré</u> :

Si a convient, alors $a = \dfrac{\varphi(b)}{\|b\|^2} b$

<u>Synthèse</u> : <u>Mq $\forall x \in E$, $\varphi(x) = \left\langle \dfrac{\varphi(b)}{\|b\|^2} b, x \right\rangle$</u>

- Si $x \in \mathrm{Ker}\,\varphi$ $\quad \varphi(x) = 0$

  $\left\langle \dfrac{\varphi(b)}{\|b\|^2} b, x \right\rangle = 0$ car $b \perp x$

• Si $x = b$ $\quad \left\langle \frac{\varphi(b)}{\|b\|^2} b, b \right\rangle = \frac{\varphi(b)}{\|b\|^2} \|b\|^2$

$= \varphi(b)$

Donc φ et $\left\langle \frac{\varphi(b)}{\|b\|^2} b, \cdot \right\rangle$ coïncident

sur $\operatorname{Ker}\varphi$ et $(\operatorname{Ker}\varphi)^\perp$

Or $E = \operatorname{Ker}\varphi \oplus (\operatorname{Ker}\varphi)^\perp$

Donc φ et $\left\langle \frac{\varphi(b)}{\|b\|^2} b, \cdot \right\rangle$ coïncident sur E.

(par linéarité).

$$\begin{aligned} \langle a, \cdot \rangle : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \langle a, x \rangle \end{aligned}$$

Rmq : <u>Autre approche</u> :

$$\begin{aligned} \psi \quad E &\longrightarrow \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \\ a &\longmapsto \langle a, \cdot \rangle \end{aligned}$$

• ψ est linéaire par bilinéarité du produit scalaire

• $a \in \operatorname{Ker}\psi \iff \forall x \in E,\ \langle a, x \rangle = 0$

$\iff a = 0_E$

donc ψ est injective

• $\dim E = n = \dim \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$

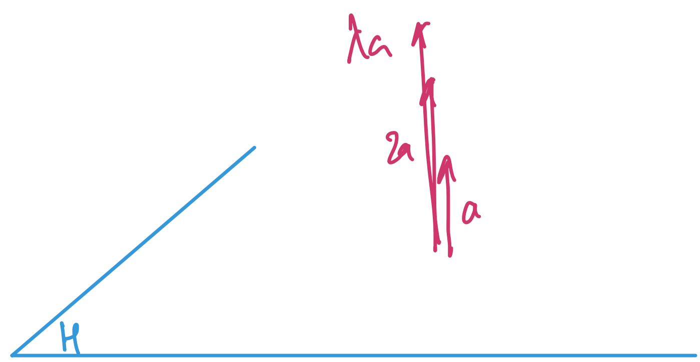
donc ψ est un isomorphisme.

Remarque:

On utilise ce théorème pour écrire les formes linéaires comme des produits scalaires, caractérisés par 1 vecteur... (orthogonal à $\operatorname{Ker}\varphi$).

Remarque. *Soit H un hyperplan. Alors il existe une forme linéaire non nulle φ telle que $H = \operatorname{Ker}\varphi$. On applique à φ le théorème précédent, et on a la définition suivante :*

Définition. Lorsque $H = \operatorname{Ker}\varphi$, où $\varphi \neq 0$, le vecteur a est orthogonal à l'hyperplan $H = \operatorname{Ker}\varphi$. On dit que a est un **vecteur normal** à H.



$\exists \varphi$!

$H = \operatorname{Ker}\varphi$
$= \operatorname{Ker}(2\varphi)$
$= \operatorname{Ker}(\lambda\varphi) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^*$

$\exists a \in E$ orthogonal à H "vecteur normal"

orthogonal.

Remarque. *Les vecteurs orthogonaux à H sont alors les vecteurs colinéaires à a.*

Exemple. Qu'obtient-on en appliquant le théorème précédent à la forme linéaire :

$$\begin{array}{rccl} \varphi_a : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ & P & \mapsto & P(a) \end{array}$$

pour les produits scalaires usuels de $\mathbb{R}_n[X]$?

Corollaire. On conserve les notations précédentes.

Si E est muni d'une base orthonormée, et que a a pour coordonnées $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, alors une **équation de** H est donnée par :

$$x \in H \iff A^\top X = 0$$

où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

base ON

$E = \mathrm{Vect}(e_1 \dots e_n)$

$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a)$

$X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$

$$x \in H \iff x \perp a$$

$$\iff \langle a \mid x \rangle$$

$$\iff A^\top X = 0$$

(not matricielle du prod. scalaire en base ON)

équation de H $\quad a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$

les coeff donnent les coord d'un vecteur orthogonal à l'hyperplan.

Par ex : Dans $\mathbb{R}^3$ usuel.

$H : 2x + 3y - z = 0$

Alors $a \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ est orthogonal à H

Par ex: Dans $\mathbb{R}^2$ usuel

$D : 2x - 3y = 0$

Alors: $a\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ est orthogonal à D

$u\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ dirige D car $u \perp a$

5.2 Distance à un hyperplan, à une droite

Théorème.

Soit H un hyperplan de E, et a un vecteur normal de H. Alors pour tout $x \in E$, on a :

$$d(x, H) = \frac{|\langle a, x\rangle|}{\|a\|}$$

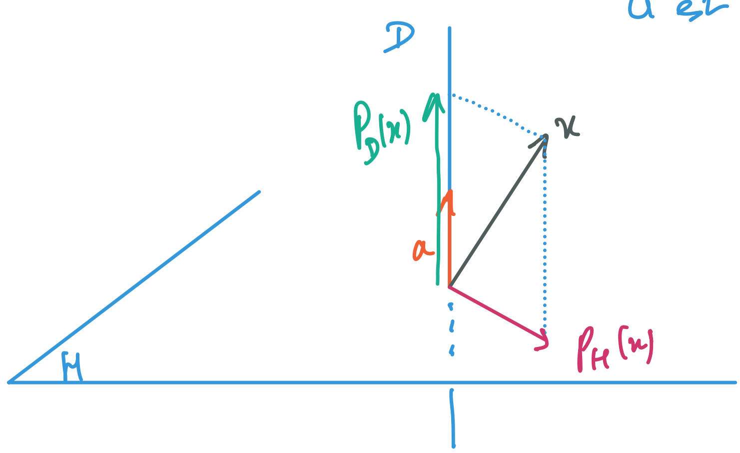
Soit D un droite vectorielle de E, dirigée par un vecteur a. Alors, pour tout $x \in E$, on a :

$$d^2(x, D) = \|x\|^2 - d^2(x, D^\perp)$$

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} \|y - x\| \quad \text{déf.}$$

$$= \|x - p_F(x)\| \quad \text{Th pour } F \text{ sev de dim finie}$$

(ou si $F = G^\perp$ où G est de dim finie)



On a $d(x,H) = \| p_D(x) \|$ $\left(\frac{a}{\|a\|} \right)$ base ON de D

$$= \| \langle x, \frac{a}{\|a\|} \rangle \frac{a}{\|a\|} \|$$

$$= \frac{|\langle x, a \rangle|}{\|a\|}$$

De même $d(x,D) = \| p_H(x) \|$

$$= \| x - p_D(x) \|$$

$$= \| x - \frac{\langle x, a \rangle}{\|a\|^2} a \|$$

ou encore : par le th de Pythagore

$$d(x,H)^2 + d(x,D)^2 = \|x\|^2$$

donc $d(x,D) = \sqrt{\|x\|^2 - \left(\frac{\langle x, a \rangle}{\|a\|} \right)^2}$