Pour moi : 104.1, 104.14

Espaces préhilbertiens réels

Dans ce chapitre, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Il s'agit essentiellement de résultats déjà vus en première année, mais qui sont au programme de PSI.

1 Produit scalaire et norme associée

1.1 Produit scalaire

Définition. On appelle **produit scalaire** sur E une forme bilinéaire, symétrique, positive et définie-positive sur E, c'est-à-dire, en notant φ cette application :

- φ est à valeurs dans $\mathbb{R}$;
- φ est linéaire par rapport à chacune de ses deux variables ;
- $\forall x, y \in E$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$;
- $\forall x \in E$, $\varphi(x, x) \geqslant 0$;
- $\forall x \in E$, $\varphi(x, x) = 0 \implies x = 0$.

Remarque. *La symétrie et la linéarité par rapport à l'une des variables suffit à justifier la bilinéarité.*
Notation. On note en général $\langle x, y\rangle$, $(x|y)$ ou $x \cdot y$ le produit scalaire de x avec y.
Définition. Un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, muni d'un produit scalaire, s'appelle un **espace préhilbertien**.
S'il est en plus de dimension finie, on dit que c'est un **espace euclidien**.

et produit scalaire

1.2 Exemples de référence

Remarque. *Les exemples de cette section figurent explicitement au programme, et peuvent donc être utilisés directement.*

Définition. Sur $\mathbb{R}^n$, le produit scalaire canonique est défini par :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

où $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

$\mathbb{R}^3$ $\quad x = (x_1, x_2, x_3)$

$y = (y_1, y_2, y_3)$

$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$

$\mathbb{R}^3$ $\quad \vec{u_1} = (x_1, y_1, z_1)$

$\vec{u_2} = (x_2, y_2, z_2)$

$\langle \vec{u_1}, \vec{u_2} \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$

- à valeurs dans $\mathbb{R}$
- bilinéarité

$\langle \vec{u_1}, \lambda_2 \vec{u_2} + \lambda_3 \vec{u_3} \rangle$

$= x_1 (\lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) + y_1 (\lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3) + \ldots$

$= \ldots$

- positivité

$\langle \vec{u_1}, \vec{u_1} \rangle = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$

$\geqslant 0$

- défini-positif

Soit $\vec{u_1}$ tq $\langle \vec{u_1}, \vec{u_1} \rangle = 0$

ie $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 0$

Somme nulle de termes positifs

donc $x_1 = y_1 = z_1 = 0$

Définition. Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le produit scalaire canonique est défini par :

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^\top B)$$

Si $A = (a_{ij})_{ij}$ et $B = (b_{ij})_{ij}$, on a de plus l'expression :

$$\langle A, B\rangle = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}b_{ij}$$

Il s'agit donc de la somme des produits terme à terme des deux matrices.

$$A^\top B = \begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} & & \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

$\operatorname{tr}(A^\top B) \in \mathbb{R}$

$< A, B > = \operatorname{tr}(A^\top B)$ produit scalaire canonique.

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{ij} \quad (*)$$

somme des produits terme à terme.

Justifications :

- Commençons par montrer l'égalité $(*)$

On note $A = (a_{ij})_{i,j}$ $\quad B = (b_{ij})_{i,j}$

$[M]_{ij}$ le coeff i,j de M.

$$[AB]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$$

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^T B)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} [A^T B]_{ii}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} [A^T]_{ik} [B]_{ki}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ki} b_{ki}$$

- C'est une forme bilinéaire car tr est une forme linéaire, que la transposée est linéaire et le produit bilinéaire.
- $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^T B)$
$$= \operatorname{tr}\left((A^T B)^T \right)$$
$$= \operatorname{tr}(B^T A)$$
$$= \langle B, A\rangle$$
- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
$$\langle A, A\rangle = \sum_{i,j} a_{ij}^2$$
$$\geq 0$$
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq $\langle A, A\rangle = 0$
ie $\sum a_{ij}^2 = 0$
Somme nulle de termes positifs donc $A = 0$

Définition. Sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, le produit scalaire canonique est défini par :

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

- Existe bien comme intégrale de fct continue sur segment
- c'est une forme bilinéaire symétrique

  car l'intégrale est linéaire, le produit est bilinéaire et commutatif.
- Pour $f \in \mathcal{C}^0$, $\langle f,f\rangle = \int_a^b f^2(t)\,dt \geq 0$
- Soit $f \in \mathcal{C}^0$ tq $\langle f,f\rangle = 0$

  ie $\int_a^b f^2(t)\,dt = 0$

  Intégrale nulle d'une fct continue positive

  donc $\forall t \in [a,b]$, $f^2(t) = 0$

  ie $f = \tilde{0}$

1.3 Autres exemples

Remarque. *Même s'ils sont très classiques, les exemples de cette section ne figurent pas explicitement au programme.*

Définition. Sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit scalaire canonique est défini par :

$$\langle X, Y\rangle = X^\top Y$$

Remarque. *Il coïncide avec le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, via l'identification usuelle entre une matrice colonne et un n-uplet.*
On trouve parfois la définition $\langle X, Y\rangle = \mathrm{tr}(X^\top Y)$. En effet, on a $X^\top Y \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. La trace permet ici d'en faire un réel plutôt qu'une matrice 1×1. On accepte cependant souvent de confondre $\mathbb{R}$ et $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$$

$$X^T Y = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

$$= \langle X, Y \rangle$$

produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$

Exemple. En confondant polynôme et fonction polynomiale associée, $\mathbb{R}[X]$ est muni du produit scalaire défini par :

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

•

•

•

•

• On suppose $\langle P, P\rangle = 0$

ie $\int_0^1 P^2(t)\,dt = 0$

Intégrale nulle d'une fonction continue positive

donc $\forall t \in [0,1]$, $P(t) = 0$

Donc P a une infinité de racines,

donc $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

Exemple. Sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, avec m une fonction continue et strictement positive, on peut définir un autre produit scalaire en posant :

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)m(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple. Soit w une fonction continue, à valeurs strictement positives sur un intervalle I. On note : $[0,+\infty[$

$$E = \{f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}) \text{ t.q. } f^2 \quad \text{intégrable sur } I\}$$

C'est un espace vectoriel, que l'on peut munir d'un produit scalaire en posant :

$$\langle f, g\rangle = \int_{[0,+\infty[} f(t)g(t) \quad \mathrm{d}t$$

• Existence Soit $f, g \in E$

* $t \mapsto f(t)g(t)$ est continue sur $[0,+\infty[$
* $|f(t)g(t)| \leq \frac{1}{2}\left(f^2(t) + g^2(t)\right)$

intégrables sur $[0,+\infty[$

donc $t \mapsto f(t)g(t)$ intégrable sur $[0,+\infty[$

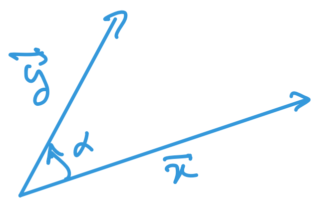
• Forme bilinéaire symétrique, positive, définie positive.

1.4 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Inégalité de Cauchy-Schwarz.

> Pour tout $x, y \in E$, on a :
> $$|\langle x, y\rangle| \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}$$
> L'égalité a lieu si et seulement si x et y sont colinéaires.

Remarque. *On notera $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ la norme associée au produit scalaire. L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'interprète bien géométriquement.*



$\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle = \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\| \cos(\alpha)$

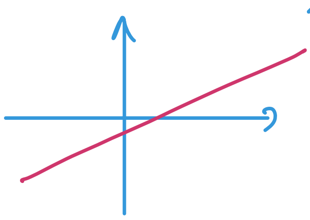
Preuve: Soit $x, y \in E$

$\forall t \in \mathbb{R}$ $\langle tx+y, tx+y\rangle \geqslant 0$ par positivité

$= t\langle x, tx+y\rangle + \langle y, tx+y\rangle$

$= t^2\langle x, x\rangle + 2t\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle$ par bilinéarité

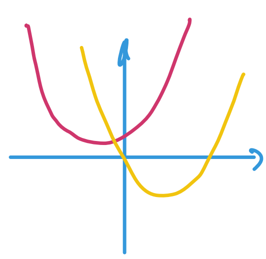
polynomiale en t.



1er cas: Si $\langle x, x\rangle = 0$ polynôme de degré $\leqslant 1$

par les limites en $\pm\infty$, $\langle x, y\rangle = 0$

l'inégalité annoncée est triviale.



2e cas: pol. de degré $2 \geqslant 0$

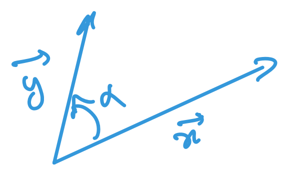
donc au plus 1 racine réelle

donc $\Delta \leqslant 0$

ie $\langle x, y\rangle^2 - \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leqslant 0$

ie $|\langle x,y\rangle| \leq \sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}$

<u>Remarque</u>: cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy Schwarz.



$$|\langle \vec{x},\vec{y}\rangle| = \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|$$

$$\iff |\cos\alpha| = 1$$

$$\iff \alpha = 0 \quad [\pi]$$

$$\iff \vec{x},\vec{y} \text{ colinéaires}$$

<u>Preuve</u>: cas d'égalité lorsque $\Delta = 0$

ie $\exists t_0 \in \mathbb{R}$ tq

$\langle t_0 x + y \mid t_0 x + y\rangle = 0$

donc (caractère défini-positif)

$t_0 x + y = 0$

donc x, y colinéaires.

Inégalité de Minkowski. Pour tout $x, y \in E$, on a :

$$\sqrt{\langle x+y, x+y\rangle} \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle} + \sqrt{\langle y, y\rangle}$$

L'égalité a lieu si et seulement si x et y sont colinéaires et de même sens (on dit parfois *positivement liés*).

Remarque. *Avec* $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$*, l'inégalité de Minkowski n'est rien d'autre que l'inégalité triangulaire sur la norme euclidienne.*

Preuve : $\langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle$

$\leq \langle x, x\rangle + 2\sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle} + \langle y, y\rangle$

$= \left(\sqrt{\langle x, x\rangle} + \sqrt{\langle y, y\rangle}\right)^2$

d'où le résultat.

1.5 Norme euclidienne

Définition. On appelle **norme euclidienne** associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ l'application :

$$\| \cdot \| \,:\, x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Proposition. C'est une norme.
Définition. Un vecteur de norme 1 est qualifié d'**unitaire**.
Proposition. Si E est muni de sa norme euclidienne, le produit scalaire est continu sur $E \times E$.

- Existe car $\forall x \in E \quad \langle x, x \rangle \geqslant 0$
- $\forall x \in E, \quad \|x\| \in \mathbb{R}_+$
- $\forall x \in E, \ \lambda \in \mathbb{R} \qquad \|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle}$

$$= \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle}$$
par bilinéarité

$$= |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle}$$
$$= |\lambda| \, \|x\|$$

- Soit $x \in E$ tq $\|x\| = 0$

  ie $\langle x, x \rangle = 0$

  donc $x = 0$ car défini-positif.

- Inég triangulaire = Minkowski

1.6 Identités remarquables

Proposition. On a les identités remarquables suivantes :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle \qquad \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle$$

les identités de polarisation :

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) \qquad \langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

et l'identité du parallélogramme :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle$$

$$= \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle$$

$$= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle$$

$$= \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$$

2 Orthogonalité

2.1 Vecteurs orthogonaux

Définition. Deux vecteurs x et y sont dits **orthogonaux** si et seulement si :

$$\langle x, y \rangle = 0$$

On note dans ce cas : $x \perp y$.

Remarque. *Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs de E, et un vecteur orthogonal à tous les vecteurs de E est nul.*

$\forall x \in E, \quad \langle 0, x \rangle = 0$

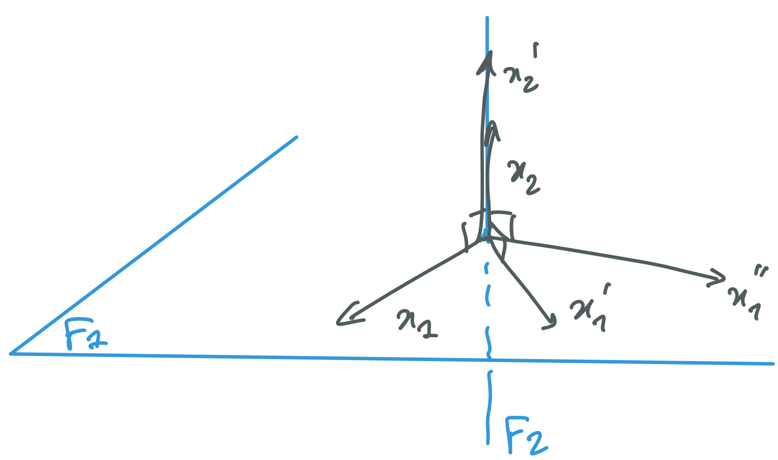
Si $y \in E$ tq $\forall x \in E$ $\langle y, x \rangle = 0$ (en part $\langle y, y \rangle = 0$)

alors $y = 0_E$

Définition. Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. On dit qu'ils sont **orthogonaux** si et seulement si :

$$\forall x_1 \in F_1,\ x_2 \in F_2,\ x_1 \perp x_2$$

On note dans ce cas : $F_1 \perp F_2$.



Définition. Une famille $(v_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est dite **orthogonale** si et seulement si :

$$\forall i,j \in I,\ i \neq j \implies \langle v_i, v_j\rangle = 0$$

Elle est dite **orthonormée** si et seulement si :

$$\forall i,j \in I,\ \langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Proposition. Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.
Toute famille orthonormée est libre.

Soit $(v_i)_{i\in I}$ famille orthogonale de vecteurs non nuls.

<u>Mq que c'est une famille libre.</u>

Soit $\{i_1, \dots, i_n\} \subset I$

Mq que $(v_{i_1}, \dots, v_{i_n})$ est libre.

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tq $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_{i_k} = 0_E$

$\forall j \in \{1, .., n\}$

$$\langle v_{i_j}, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_{i_k} \rangle = \langle v_{i_j}, 0 \rangle = 0$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle v_{i_j}, v_{i_k}\rangle$$

$$= \lambda_j \langle v_{i_j}, v_{i_j}\rangle \quad \text{car } v_{i_k} \perp v_{i_j} \text{ pour } j \neq k$$

or $\langle v_{i_j} | v_{i_j} \rangle \neq 0$, donc $\lambda_j = 0 \ \forall j$

Exemple. Les polynômes élémentaires de Lagrange forment une famille libre.

$$L_j = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(X - a_i)}{(a_j - a_i)}$$

$a_0, \ldots, a_n$ 2 à 2 distincts

$$L_j(a_k) = \delta_{kj}$$

La liberté se montre facilement ...

Rq Posons, pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)\, Q(a_k)$$

- C'est un produit scalaire :

  * c'est une forme bilinéaire symétrique car :

    $P \longmapsto P(a_k)$ est une forme linéaire

    le produit est bilinéaire et commutatif

  * $\langle P, P \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)^2 \geqslant 0$

  * On suppose $\langle P, P \rangle = 0$ i.e. $\sum_{k=0}^{n} P(a_k)^2 = 0$

    somme nulle de termes positifs

    donc $\forall k \quad P(a_k) = 0$

    $P \in \mathbb{R}_n[X]$ avec $(n+1)$ racines donc $P = 0$

- Vérifions que $(L_j)_{0\le j\le n}$ orthogonale

$i \neq j$

$$\begin{aligned}
\langle L_i \mid L_j \rangle &= \sum_{k=0}^{n} L_i(a_k)\, L_j(a_k) \\
&= 0 + \underbrace{L_i(a_i)}_{=1}\,\underbrace{L_j(a_i)}_{=0} + \underbrace{L_i(a_j)}_{=0}\,\underbrace{L_j(a_j)}_{=1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle L_i \mid L_i \rangle &= \sum_{k=0}^{n} L_i^2(a_k) \\
&= 0 + L_i^2(a_i) \\
&= 1
\end{aligned}$$

$(L_j)_{0\le j\le n}$ est une famille <u>orthonormée</u> de $\mathbb{R}_n[X]$

Théorème de Pythagore.

x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Cas d'une famille finie de vecteurs. Si $(v_1, \dots, v_p)$ est une famille orthogonale, alors $\left\|\sum_{i=1}^{p} v_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|v_i\|^2$.

Preuve:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle$$

$$x \perp y \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} v_i \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{p} v_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{p} v_j \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \left\langle v_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{p} v_j \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{p} \langle v_i | v_j \rangle \right)$$

$$= \sum_{i,j} \langle v_i | v_j \rangle$$

or $(v_i)_i$ est orthogonale

$$= \sum_{i=1}^{n} \langle v_i | v_i \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^2$$

2.2 Orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Définition. Soit F un sous-espace vectoriel de E. On appelle **orthogonal de F** l'ensemble :

$$F^{\perp} = \{x \in E \text{ t.q. } \forall y \in F,\ x \perp y\}$$

$x \in F^{\perp} \iff \forall y \in F,\ \langle x, y\rangle = 0$

Proposition. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

- $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.
- $\{0\}^{\perp} = E$, $E^{\perp} = \{0\}$, $F \subset \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$.
- $F \subset G \implies G^{\perp} \subset F^{\perp}$.
- $F \cap F^{\perp} = \{0\}$: F et $F^{\perp}$ sont en somme directe.
- Si $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de F, x est orthogonal à F si et seulement si il est orthogonal à chaque vecteur de $\mathcal{B}$.

Remarque. *On peut en fait définir $A^{\perp}$ pour toute partie A de E. C'est toujours un sous-espace vectoriel de E.*
Remarque. *$F \perp G$ ne signifie pas que $G = F^{\perp}$, mais seulement une inclusion.*

- Mq $F^{\perp}$ sous.ev de E

$\boxed{M1}$ * $F^{\perp} \subset E$

* 0_E est orthogonal à tout $y \in F$

donc $0_E \in F^{\perp}$

* Soit $x_1, x_2 \in F^{\perp}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

Mq $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in F^{\perp}$

$\forall y \in F$, $\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y\rangle$

$= \lambda_1 \langle x_1, y\rangle + \lambda_2 \langle x_2, y\rangle$

$= \lambda_1 . 0 + \lambda_2 . 0$

$= 0$

donc $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in F^{\perp}$

$\boxed{\Pi 2}$ $\forall y \in E, \quad \varphi_y : E \longrightarrow \mathbb{R}$

$\qquad\qquad\qquad x \longmapsto \langle x, y \rangle$

est une forme linéaire.

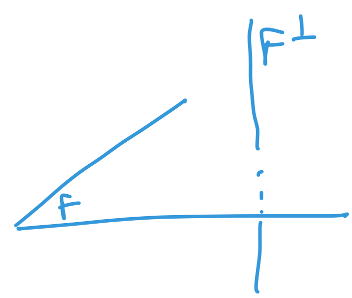
et

$$F^\perp = \{ x \in E \text{ tq } \forall y \in F \ \varphi_y(x) = 0 \}$$

$$= \bigcap_{y \in F} \operatorname{Ker} \varphi_y$$

est un ev. comme intersection d'ev.

- $\{0\}^\perp = E, \quad E^\perp = \{0\}$
- <u>Mq $F \subset (F^\perp)^\perp$</u>



Soit $x \in F$

Mq $x \in (F^\perp)^\perp$

Soit $y \in F^\perp$ Mq $x \perp y$

Or $x \in F$ et $y \in F^\perp$ donc $x \perp y$.

⚠ <u>pas d'égalité en général</u>, égalité si E de dim finie

- <u>Mq $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$</u>

Supposons $F \subset G$.

Soit $x \in G^\perp$

Mq $x \in F^\perp$

Soit $y \in F$. Alors $y \in G$ donc $x \perp y$

car $x \in G^\perp$ et $y \in G$.

- $F \oplus F^\perp$ ⚠ pas supplémentaires en général

supplémentaires si E de dim finie

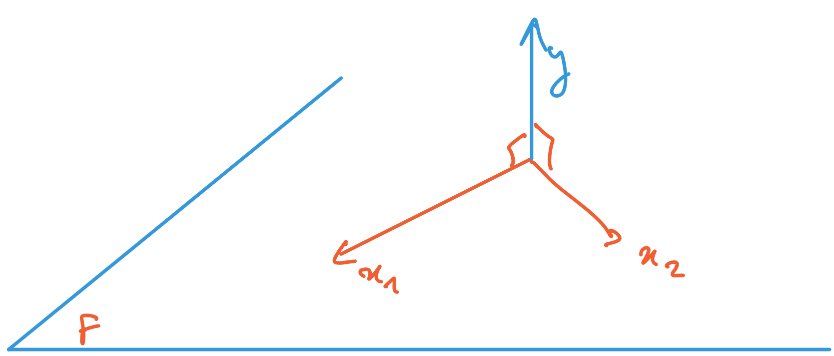
Soit $x \in F \cap F^\perp$

alors $\langle x , x \rangle = 0$ car $x \in F$ et $x \in F^\perp$

donc $x = 0$

- Si $F = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$

$y \in F^\perp \iff \forall k \in \{1 .. p\} \; y \perp x_k$



$\boxed{\Rightarrow}$ direct.

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit y tq $\forall k \; y \perp x_k$.

Soit $x \in F$

alors $\exists \lambda_1 \dots \lambda_p$ tq $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle x_i, y \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \, 0$$

$$= 0$$

donc $y \in F^{\perp}$