Pour ex : 206.2, 206.3, 206.4

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,dt \overset{?}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,dt$$

3 Intégration et séries de fonctions

§ important !

3.1 Intégration terme à terme sur un segment

Théorème d'intégration terme à terme sur un segment par convergence uniforme.

Soit $a < b$, et $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un segment $[a, b]$.
Si :

- $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ (on note S sa somme),
- $[a, b]$ est un segment,
- les f_n sont continues,

alors :

- la série $\sum \left(\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \right)$ converge,
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b S(t)\,\mathrm{d}t$

Remarque. *On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes de convergence des séries envisagées.

Preuve : on applique le th du chap 205 à la suite des sommes partielles.

Exemple. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ $\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int_0^x t^n e^{-t}\, dt}_{\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x \frac{t^n e^{-t}}{n!} dt} = x$.

quel indice de sommation ? n

quelle variable d'intégration ? t

quel intervalle d'intégration ? $[0, x]$

x est fixé

ici intégrale de fct continue sur un segment.

<u>On pose :</u> $f_n(t) = \frac{t^n e^{-t}}{n!}$ pour $t \in [0, x]$

* les f_n sont continues
* $[0, x]$ est un segment
* <u>étudions la cv uniforme de $\sum f_n$ sur $[0, x]$.</u>

$\forall t \in [0, x] \quad |f_n(t)| = \frac{t^n e^{-t}}{n!}$

$\leq \frac{x^n e^{-0}}{n!}$ indép. de t

$\llcorner$ tg série cv (exponentielle)

donc <u>$\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément</u> sur $[0, x]$

Donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x f_n(t)\, dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\, dt$

$= \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n e^{-t}}{n!} dt$

$= \int_0^x e^{-t} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \right) dt$

$$= \int_0^x e^{-t} \, e^{t} \, dt$$

$$= x$$

3.2 Interversion $\sum / \int$ sur un intervalle quelconque

Théorème d'interversion $\sum / \int$ sur un intervalle quelconque. intégrales généralisées (ou non)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I.
Si :

- $\sum f_n$ converge simplement sur I (on note S sa somme), (automatiquement vérifiée en général)
- les f_n et S sont continues par morceaux sur I
- les f_n sont intégrables sur I,
- la série numérique $\sum \left(\int_I |f_n(t)| \, \mathrm{d}t \right)$ converge,

alors :

- la fonction S est intégrable sur I,
- $\displaystyle \int_I S(t) \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) \, \mathrm{d}t$

Preuve. La démonstration est hors programme. □

Remarque.

- *On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) \, \mathrm{d}t = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \, \mathrm{d}t$$

  Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes de convergence des séries et des intégrales envisagées.
- *L'intégrabilité des f_n sert à justifier l'existence des $\int_I f_n$.*
- *L'hypothèse importante de ce théorème est la convergence de la série $\sum \int |f_n|$.*
- *Dans certains ouvrages, ce théorème s'appelle « théorème de la convergence $\mathcal{L}^1$ ».*

Exemple. Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

- $S : t \mapsto \dfrac{\ln t}{1-t}$ est continue sur $]0,1[$

  * au voisinage de 0, $\dfrac{\ln t}{1-t} \sim \ln t$ intégrable en 0

  * au voisinage de 1

$$S(1-h) = \frac{\ln(1-h)}{h} \quad \text{pour } h \xrightarrow{>} 0$$

$$\sim -1 \quad \text{intégrable en } h \to 0$$

Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t}\,dt$ existe.

- $$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t}\,dt = \int_0^1 \ln t \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} t^n\,dt$$

$$= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \ln t \quad dt$$

Appliquons le th. d'intervers° avec $f_n(t) = t^n \ln t$

convergence de la série de t.g. $\displaystyle\int_0^1 |f_n(t)|\,dt$?

↑ à calculer

* $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,1[$

  Bien oui ! la série cv et sa somme est $\dfrac{\ln t}{1-t}$

* les f_n et S sont continues (par mcx) sur $]0,1[$

* les f_n sont intégrables sur $]0,1[$:

au voisinage de 0 $\quad f_n(t) = t^n \ln t \xrightarrow[t\to 0]{} 0$

(sauf $n=0$ où $f_n(t) = \ln t$ intégrable)

au voisinage de 1 $\quad f_n(t) \xrightarrow[t\to 1]{} 0$

* Mq que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \int_0^1 |f_n(t)|\,dt$ converge

$$\int_0^1 |f_n(t)|\,dt = \int_0^1 |t^n \ln t|\,dt$$

$$= -\int_0^1 t^n \ln t \; dt$$

par intégration par parties, sous réserve de limites finies du crochet

$$= -\underbrace{\left[\frac{1}{n+1} t^{n+1} \ln t\right]_0^1}_{=0} + \int_0^1 \frac{1}{n+1} t^{n+1} \cdot \frac{1}{t}\,dt$$

$$= \frac{1}{n+1} \int_0^1 t^n\,dt$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} \quad \text{tg d'une série cv.}$$

Donc par interversion $\sum / \int$, on a :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 t^n \ln t \; dt$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-)\frac{1}{(n+1)^2} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

3.3 Utilisation de la convergence dominée

Remarque. *Lorsque le théorème du paragraphe précédent ne s'applique pas (lorsque $\sum \int_I |f_n|$ ne converge pas), on peut chercher à appliquer le théorème de convergence dominée vu dans le chapitre 205 à la suite de fonctions $(S_n)_n$ des sommes partielles, ou à celle $(R_n)_n$ des restes, de la série de fonctions $\sum f_n$.*

Exemple. Montrer que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$

- Intégrale sur $]0, +\infty[$ $\longrightarrow$ généralisée $\longrightarrow$ pas § 31
- $\sum \int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,dt$ cv ?

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{n^2+t^2}\,dt = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \frac{1/n}{1+\left(\frac{t}{n}\right)^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{n}\left[\operatorname{Arctan}\frac{t}{n}\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{\pi}{2n}$$

Zut ! $\sum \frac{\pi}{2n}$ diverge $\longrightarrow$ pas § 32.

- On passe par les sommes partielles, on utilise le Th de cv dominée.

Posons $S_n(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2+t^2}$

$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} S$

domination : les S_n et S sont cpm

* à $t \in]0, +\infty[$ fixé,

$\left|\dfrac{(-1)^{k-1}}{k^2+t^2}\right| \sim \dfrac{1}{k^2}$ tg série cv

donc $\sum \dfrac{(-1)^{k-1}}{k^2+t^2}$ cv absolument

donc $(S_n(t))_n$ converge. On note S sa somme.

$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} S$

* Dominons :

$$|S_n(t)| = \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2+t^2} \right|$$

à majorer indép de n
par une fct intégrable sur $]0,+\infty[$

* Travaillons sur les restes

$$R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2+t^2}$$

$$R_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{à } t \text{ fixé} \quad \left(R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} 0\right)$$

$$|R_n(t)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2+t^2} \right|$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)^2+t^2}$$ car $\left(\frac{1}{k^2+t^2}\right)_k$ est positive, décroissante de limite nulle, TSSA

$$\leq \frac{1}{1+t^2}$$ indép de n

intégrable sur $]0,+\infty[$

Donc par cv dominée,

$$\int_0^{+\infty} R_n(t)\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} 0\,dt = 0$$

• Conclusion:

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{}$$

$$\int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2+t^2}\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2+t^2}\, dt + \int_0^{+\infty} R_n(t)\, dt$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2+t^2}\, dt + \int_0^{+\infty} R_n(t)\, dt$$

par linéarité (somme finie)

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\pi}{2k} + \int_0^{+\infty} R_n(t)\, dt$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{\pi}{2k} + 0$$

d'où l'égalité.