Pour jé : 205.20, 205.25   Pour sa : FORUM

Pour lu : ex à rédiger : 205.21 ou 205.22

Pour ma : 205.14, 205.17, 205.26

~~6 Dérivation~~

~~6.1 Limite uniforme d'une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$~~

Théorème de ~~dérivabilité~~ classe $\mathcal{C}^1$ de la limite d'une suite de fonctions.

> Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur I.
> Si :
>
> - pour tout n, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,
> - $(f_n)_n$ converge simplement sur I vers f,
> - la suite des fonctions dérivées $(f_n')_n$ converge uniformément sur I vers une fonction g,
>
> alors :
>
> - f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,
> - $f' = g$.

Remarque.

- *On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x)\right)$$

  qui explique le nom du théorème. Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes d'existence des limites et dérivées envisagées.
- *La convergence uniforme de $(f_n)_n$ n'entraîne pas la dérivabilité de la limite.*
- *Comme la dérivabilité est une propriété locale, on peut remplacer l'hypothèse de convergence uniforme sur I de $(f_n')_n$ par l'hypothèse moins forte de convergence uniforme sur tout segment de I, ou d'autres intervalles adaptés à la situation.*

Preuve : Soit $a \in I$

$$\int_a^x f_n'(t)\,dt = [f_n(t)]_a^x$$

Comme f_n est $\mathcal{C}^1$, pour $x \in I$:

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\,dt$$

- $(f_n)_n$ cv simplement sur I donc

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$$

$$f_n(a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$$

- $*$ $(f'_n)_n$ cv uniformément sur $[a,x]$ vers g
  $*$ les f'_n sont continues
  $*$ $[a,x]$ est un segment

  Donc $\displaystyle\int_a^x f'_n(t)\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^x g(t)\,dt$

On passe à la limite, à x fixé, dans

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t)\,dt$$

$$\downarrow$$

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt$$

Comme g est limite uniforme de la suite de $(f'_n)_n$ qui sont continues, g est continue, donc f est $\mathcal{C}^1$ et

$$f'(x) = g(x)$$

Exemple. Étudier la convergence et la dérivabilité de la limite de la suite de fonctions définies par :

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$$

* Étude de la cv simple

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sqrt{x^2} = |x|$$

donc $(f_n)_n$ cv simplement vers $(x \longmapsto |x|)$

* Étude de la cv uniforme

Pour $x \in \mathbb{R}$

$$\left| f_n(x) - |x| \right| = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x|$$

$$= \frac{\left(x^2 + \frac{1}{n}\right) - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|}$$

$$= \frac{1/n}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|}$$

$$\leq \frac{1/n}{\sqrt{0 + 1/n} + 0}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{indép de } x$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

donc $(f_n)_n$ cv uniformément vers $(x \longmapsto |x|)$

* les f_n sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ $\qquad \sqrt{x^2+\frac{1}{n}}$

et $f_n'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}}$

* Étude de la cv simple de $(f_n')_n$

à x fixé :

$$f_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}}$$

1er cas : si $x=0$: $\quad f_n'(0) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

2e cas $\quad x \neq 0$

$$f_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{si } x>0 \\ -1 & \text{si } x<0 \end{cases}$$

Ccl : $(f_n')_n$ cv simplement vers g

où $g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ 1 & \text{si } x>0 \end{cases}$

* cv uniforme de $(f_n')_n$?

les f_n' sont continues et la limite g ne l'est pas, donc la cv n'est pas uniforme.

* Dérivabilité de la limite de $(f_n)_n$?

$x \mapsto |x|$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $]-\infty,0[$

mais pas en 0.

(dérivée : $+1$ si $x>0$

-1 si $x<0$

et c'est tout)

6.2 Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Théorème.

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définie sur I, et $k \in \mathbb{N}^*$.
Si :

- pour tout n, f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I,
- pour tout $0 \leqslant j \leqslant k-1$, $(f_n^{(j)})_n$ converge simplement sur I vers une fonction g_j,
- la suite $(f_n^{(k)})_n$ converge uniformément sur I vers une fonction g_k,

alors :

- la limite simple g_0 de $(f_n)_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I
- pour tout $1 \leqslant j \leqslant k$, $g_0^{(j)} = g_j$.

Remarque.

- *On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :*

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} f_n(x)\right)$$

  qui explique le nom du théorème. Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes d'existence des limites et dérivées envisagées.

- *Comme la dérivabilité est une propriété locale, on peut remplacer l'hypothèse de convergence uniforme sur I des $(f_n^{(k)})_n$ par l'hypothèse moins forte de convergence uniforme sur tout segment de I, ou d'autres intervalles adaptés à la situation.*

$f_n \xrightarrow{CS} g_0$

$f_n' \xrightarrow{CS} g_1$

$f_n'' \xrightarrow{CS} g_2$

$\vdots$

$f_n^{(k-1)} \xrightarrow{CS} g_{k-1}$

$f_n^{(k)} \xrightarrow{CU} g_k$

alors g_0 est $\mathcal{C}^k$

et $g_0^{(k)} = g_k$

(et $g_0^{(j)} = g_j$)

Preuve : par récurrence sur k.

- pour $k=0$, c'est le transfert de continuité
- pour $k=1$, c'est le Th de classe $\mathcal{C}^1$.

• On suppose le résultat établi pour $k \in \mathbb{N}$.

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définie sur I, et $k \in \mathbb{N}^*$.
Si :

- pour tout n, f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I,
- pour tout $0 \leqslant j \leqslant k-1$, $(f_n^{(j)})_n$ converge simplement sur I vers une fonction g_j,
- la suite $(f_n^{(k)})_n$ converge uniformément sur I vers une fonction g_k,

alors :

- la limite simple g_0 de $(f_n)_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I
- pour tout $1 \leqslant j \leqslant k$, $g_0^{(j)} = g_j$.

Soit alors $(f_n)_n$ tq

* les f_n sont $\mathcal{C}^{k+1}$
* $\forall j \in \{0, \dots, k\}$ $\quad f_n^{(j)} \xrightarrow[n \to +\infty]{CS} g_j$
* $f_n^{(k+1)} \xrightarrow[n \to +\infty]{CU} g_{k+1}$

Appliquons le th de classe $\mathcal{C}^1$ à $\left(f_n^{(k)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

On a : * $f_n^{(k)}$ est $\mathcal{C}^1$ car f_n est $\mathcal{C}^{k+1}$

* $f_n^{(k)} \xrightarrow{CS} g_k$
* $\left(f_n^{(k)}\right)' = f_n^{(k+1)} \xrightarrow{CU} g_{k+1}$

donc g_k est $\mathcal{C}^1$ et $g_k' = g_{k+1}$

On applique l'HR à $(f_n)_n$

* les f_n sont $\mathcal{C}^k$ (ben oui ! elles sont $\mathcal{C}^{k+1}$)
* $(f_n)_n, (f_n')_n, \dots, (f_n^{k-1})_n$ cv simplement vers ...
* $\left(f_n^{k}\right)_n \xrightarrow{CU} g_k$

et pourquoi ?!

Vérifions que cette dernière cv est uniforme sur

Avant-dernier segment $[a,b] \subset I$

Soit $[a,b] \subset I$ $\qquad \| f_n^{(k)} - g_k \|_\infty^{[a,b]} \leq ?$

Pour $x \in [a,b]$

$$|f_n^{(k)}(x) - g_k(x)|$$
$$= \left| f_n^{(k)}(a) + \int_a^x f_n^{(k+1)}(t)\,dt - g_k(a) - \int_a^x \underbrace{g_k'}_{\text{c'est } g_{k+1}(t)}(t)\,dt \right|$$
$$\leq |f_n^{(k)}(a) - g_k(a)| + \int_a^x |f_n^{(k+1)}(t) - g_{k+1}(t)|\,dt$$
$$\leq |f_n^{(k)}(a) - g_k(a)| + \int_a^x \|f_n^{(k+1)} - g_{k+1}\|_\infty^I\,dt$$
$$\leq |f_n^{(k)}(a) - g_k(a)| + \|f_n^{(k+1)} - g_{k+1}\|_\infty^I (x-a)$$
$$\leq \underbrace{|f_n^{(k)}(a) - g_k(a)| + \|f_n^{(k+1)} - g_{k+1}\|_\infty^I (b-a)}_{\text{indép de } x}$$

$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $f_n^{(k)} \xrightarrow{CS} g_k$

$f_n^{(k+1)} \xrightarrow{CU} g_{k+1}$

On a donc montré que g_0 est $\mathcal{C}^k$ sur tout $[a,b] \subset I$ (donc sur I) et $g_0^{(j)} = g_j \quad \forall j \in \{0, \dots, k\}$

Avec g_k $\mathcal{C}^1$ de dérivée g_{k+1}, on a terminé.