<u>Pour mar:</u> 205.3, 205.4, 205.8

Pour $n \in \mathbb{N}$ $\quad f_n : I \longrightarrow \mathbb{K}$

$x \longmapsto f_n(x)$

Suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$

<u>Convergence simple</u>

Soit $x \in I$ fixé $\quad f_n(x) = \cdots \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$

dépend de x

notée $f(x)$

On dit alors que $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{CS} f$

<u>Convergence uniforme</u>

f_n cv unif vers f sur I signifie $\|f_n - f\|_\infty^I \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$

<u>Rédaction:</u>

Pour $x \in I$ $\quad |f_n(x) - f(x)| \leq \cdots$

$\leq \alpha_n$ indép de x

$\downarrow n \to +\infty$

0

4 Continuité de la limite

Transfert de continuité par convergence uniforme

Théorème.

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur I.
Si :

- pour tout n, f_n est continue sur I,
- $(f_n)_n$ converge uniformément sur I vers f,

alors :

- f est continue sur I.

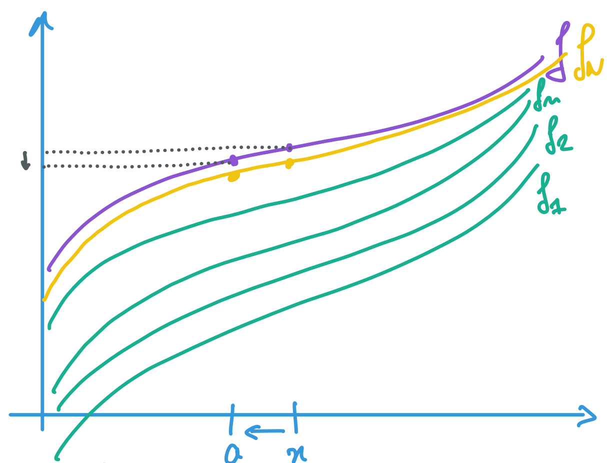
Remarque.

- *La convergence simple ne suffit pas pour justifier la continuité de f, comme le montre l'exemple des fonctions $f_n : x \in [0,1] \mapsto x^n$.*
- *La continuité des f_n et de f ne suffit pas à justifier la convergence uniforme, comme le montre l'exemple des fonctions $f_n : x \in [0,1] \mapsto n^2 x(1-x^2)^n$.*

Preuve : Soit $a \in I$. Mq f est continue en a

Pour $x \in I$

$|f(x) - f(a)| \leq ?$



On revient à la définition :

Soit $\varepsilon > 0$

On applique la déf

de $f_n \xrightarrow[\text{unif}]{CV} f$ sur I avec $\frac{\varepsilon}{3}$

donc $\exists N$ tq $\forall n \geq N$ $\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}$

On applique la déf de f_N continue en a avec $\frac{\varepsilon}{3}$

donc $\exists \eta > 0$ tq $\forall x \in I$ $|x - a| \leq \eta \Rightarrow |f_N(x) - f_N(a)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

On a donc : $\forall x \in I$ avec $|x - a| \leq \eta$:

$$
\begin{aligned}
|f(x)-f(a)| &= |f(x)-f_N(x)+f_N(x)-f_N(a)+f_N(a)-f(a)| \\
&\leq |f(x)-f_N(x)| + |f_N(x)-f_N(a)| + |f_N(a)-f(a)| \\
&\leq \|f-f_N\|_\infty + |f_N(x)-f_N(a)| + \|f_N-f\|_\infty \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}
\end{aligned}
$$

On a donc montré que f est continue en a.

Corollaire. Si $(f_n)_n$ converge simplement sur I vers f, que les f_n sont continues sur I mais que f n'est pas continue sur I, alors la convergence n'est pas uniforme sur I.

Exemple:
$$
\begin{aligned}
f_n : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto x^n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Les f_n sont continues, convergent simplement vers f non continue, donc la cv n'est pas uniforme sur $[0,1]$.

Raisonnement classique. Si $(f_n)_n$ converge simplement sur I vers f, que les f_n sont continues sur I et qu'il y a convergence uniforme sur tout segment $[a,b]$ de I, alors f est continue sur tout $[a,b] \subset I$ donc sur I.

Remarque. *Ce résultat, qui exploite le caractère local de la continuité, s'adapte aussi lorsque la convergence uniforme est vérifiée sur une famille d'intervalles adaptés à la situation.*

<u>Exemple</u>: $f_n : [0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x^n$

$f : [0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ \cancel{1 \text{ si } x = 1} \end{cases}$

<u>Peut-on montrer que la limite est continue sur $[0,1[$?</u>

<u>(par transfert de continuité)</u>

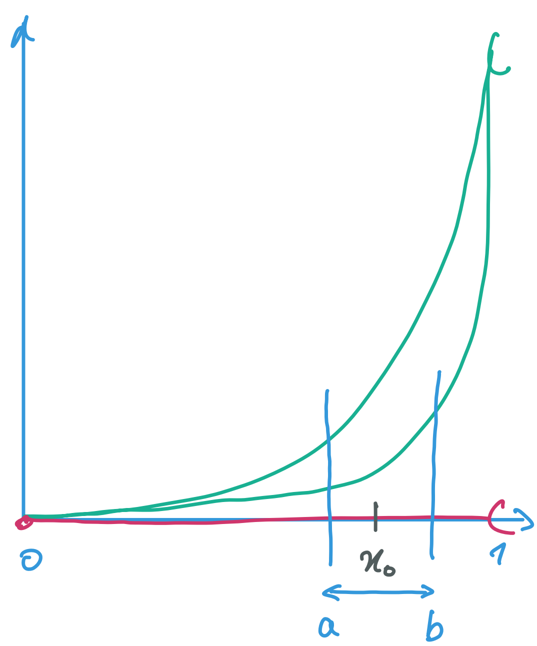
On <u>applique le théorème</u> :

* les f_n sont continues sur $[0,1[$

* Zut $f_n\left(1-\frac{1}{n}\right) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

$\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1} \neq 0$

pas cv uniforme sur $[0,1[$. Zut de zut.



Soit $x_0 \in [0,1[$, montrons que f est continue en x_0

Soit $[a,b] \subset [0,1[$ tq $x_0 \in [a,b]$

$\forall x \in [a,b]$ $\quad |f_n(x)| = |x^n|$

$$= x^n$$

$$\leq b^n \text{ indip de } x$$

$$b^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ car } b<1$$

donc $(f_n)_n$ cv uniformément vers f sur $[a,b]$

Or les f_n sont continues sur $[a,b]$

donc par transfert de continuité, f est continue sur $[a,b]$

donc en x_0.

Rédaction :

- $\forall x \in [0,b] \subset [0,1[$ $\quad |f_n(x)| \leq b^n$ indip de x, $\quad b^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

  donc $(f_n)_n$ cv uniformément vers f sur $[0,b]$

- les f_n sont continues donc par transfert de continuité,

  f est continue sur tout $[0,b] \subset [0,1[$

  donc continue sur $[0,1[$ (caractère local de la continuité)

5 Intégration

5.1 Intégration sur un segment et convergence uniforme

Théorème d'interversion limite-intégrale par cv uniforme sur un segment.

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur un segment $[a, b]$.
Si :

- $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$,
- $[a, b]$ est un segment,
- les f_n sont continues.

alors :

- la suite $\left(\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)_n$ converge,
- $\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

Remarque. *On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

qui explique le nom du théorème. Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes d'existence des limites envisagées et de mode de convergence de la suite de fonctions.

Remarque. *Le théorème de convergence dominée étudié au § 5.2 fournit un autre critère pour intégrer la limite d'une suite de fonctions, y compris lorsque l'intégrale est généralisée.*

preuve: facile !!

$$\left| \int_a^b f_n(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt \right|$$

$$= \left| \int_a^b f_n(t) - f(t)\,dt \right|$$

$$\leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\,dt$$

$$\leq \int_a^b \|f_n - f\|_\infty\,dt$$

$$= (b-a)\,\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Exemple. Étudier la convergence de la suite de terme général :

$$u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{n\sin\left(\frac{t^2}{n}\right)+1}$$

On donne l'encadrement $x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x$.

Notons $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$t \longmapsto \frac{1}{n\sin\left(\frac{t^2}{n}\right)+1}$$

- Étude de la cv simple.

Soit $t \in [0,1]$ fixé. Au voisinage de $n \to +\infty$

$$f_n(t) = \frac{1}{n\sin\left(\frac{t^2}{n}\right)+1}$$

$$= \frac{1}{n\left(\frac{t^2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)+1}$$

$$= \frac{1}{t^2+1+o(1)}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{t^2+1}$$

Donc $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} \left(f : t \longmapsto \frac{1}{t^2+1}\right)$

- Étude de la cv uniforme

Pour $t \in [0,1]$

$$|f_n(t) - f(t)|$$

$$= \left| \frac{1}{n \sin\left(\frac{t^2}{n}\right) + 1} - \frac{1}{t^2+1} \right|$$

$$= \left| \frac{t^2 - n \sin\left(\frac{t^2}{n}\right)}{\left(n \sin \frac{t^2}{n} + 1\right)\left(t^2+1\right)} \right|$$

$$= \frac{\left(t^2 - n \sin \frac{t^2}{n}\right)}{\left(n \sin \frac{t^2}{n} + 1\right)\left(t^2+1\right)}$$

$$\leq \frac{n \cdot \frac{t^6}{6n^3}}{1 \cdot 1} \quad \text{car } \sin \frac{t^2}{n} \geq 0, \ t^2 \geq 0$$

$$\leq \frac{1}{6n^2} \quad \text{car } t^2 \leq 1$$

indépendante de t

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Donc $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$

* $[0,1]$ est un segment, les f_n y sont continues.

Donc

$$u_n = \int_0^1 f_n(t)\, dt$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 f(t)\, dt = \int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\, dt$$

$$= \left[\operatorname{Arctan} t\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

5.2 Intégration sur un intervalle quelconque – Convergence dominée

Remarque. *Le théorème qui suit s'applique en particulier lorsque les intégrales sont généralisées.*

Théorème de convergence dominée.

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I.
Si :

- $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur I ;
- $(f_n)_n$ satisfait l'**hypothèse de domination** : il existe φ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ |f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$$

  où φ indépendante de n et **intégrable** sur I ;
- les fonctions f_n et f sont continues par morceaux sur I.

alors :

- les fonctions f_n et f sont intégrables sur I,
- la suite $\left(\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)_n$ converge,
- $\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f(t)\,\mathrm{d}t.$

Preuve. La démonstration est hors programme. □

Dominer c'est majorer la val abs par une fct intégrable indép de n

Remarque.

- *La 3^{e} hypothèse, de régularité, n'a pas l'importance de l'hypothèse de domination, qu'il faut nommer et sur laquelle il faut insister lors de l'utilisation de ce théorème.*
- *La **fonction dominante** φ est bien-sûr positive (elle majore $|f_n|$) et continue par morceaux (elle est intégrable). C'est sur son intégrabilité qu'il faut insister.*
- *Lorsque I est un segment, on peut prendre une fonction dominante constante.*
- *Il est fréquent que, à t fixé, $(f_n(t))_n$ soit positive et monotone.*
  - *Lorsqu'elle décroît, f_1 peut être choisie comme fonction dominante ;*
  - *Lorsqu'elle croît, la limite f peut être choisie comme fonction dominante.*

Exemple. Déterminer la limite de la suite de terme général $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx$.

On note $f_n(x) = \tan^n x$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

- <u>Étude de la cv simple</u>

Soit $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ fixé.

$$\tan^n x \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{\pi}{4}[\\ 1 & \text{si } x = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

(suite géom de raison $\tan x$)

donc $(f_n)_n$ cv simplement vers $f : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{\pi}{4}[\\ 1 & \text{si } x = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

- <u>Convergence uniforme</u> ?

Par de transfert de continuité, pas de cv uniforme sur $[0, \frac{\pi}{4}]$.

- <u>Peut-on être malin</u> ?

On note $f_n : [0, \frac{\pi}{4}[\longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \tan^n x$

$(f_n)_n$ cv simplement vers $(x \mapsto 0)$ sur $[0, \frac{\pi}{4}[$

ce n'est plus un segment.

- On applique le th de cv dominée :

$$|f_n(x)| = \tan^n x \leq 1$$

indep de n
intégrable sur $[0, \pi/4]$

• $\underline{\text{Donc}}$

$$\int_0^{\pi/4} \tan^n x \, dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{\pi/4} f(x)\, dx = 0$$

Exemple. Montrer que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Remarque. *On peut connaître la valeur* $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$

Notons $f_n(x) = \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}$

$= e^{-n\ln\left(1+\frac{x^2}{n}\right)}$

• $\underline{\text{Etude de la cv simple}}$: Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.

Au voisinage de $n\to+\infty$

$$f_n(x) = \exp\left(-n.\left(\frac{x^2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$$

$$= \exp\left(-x^2+o(1)\right)$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-x^2}$$

donc $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} \left(x \longmapsto e^{-x^2}\right)$

• $\underline{\text{Dominons}}$: $|f_n(x)| = e^{-n\ln\left(1+\frac{x^2}{n}\right)}$

à majorer indép. de n par une expression intégrable.

Notons $\varphi(t) = t\ln\left(1+\frac{x^2}{t}\right)$

$$\varphi'(t) = \ln\left(1+\frac{x^2}{t}\right) + t.\left(-\frac{x^2}{t^2}\right).\frac{1}{1+\frac{x^2}{t}}$$

$$= \ln\left(1+\frac{x^2}{t}\right) - \frac{x^2}{t+x^2}$$

$$\varphi''(t) = -\frac{x^2}{t^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{t}} + \frac{x^2}{(t+x^2)^2}$$

$$= -\frac{x^2}{t(t+x^2)} + \frac{x^2}{(t+x^2)^2}$$

$$= x^2\,\frac{-(t+x^2)+t}{t(t+x^2)^2}$$

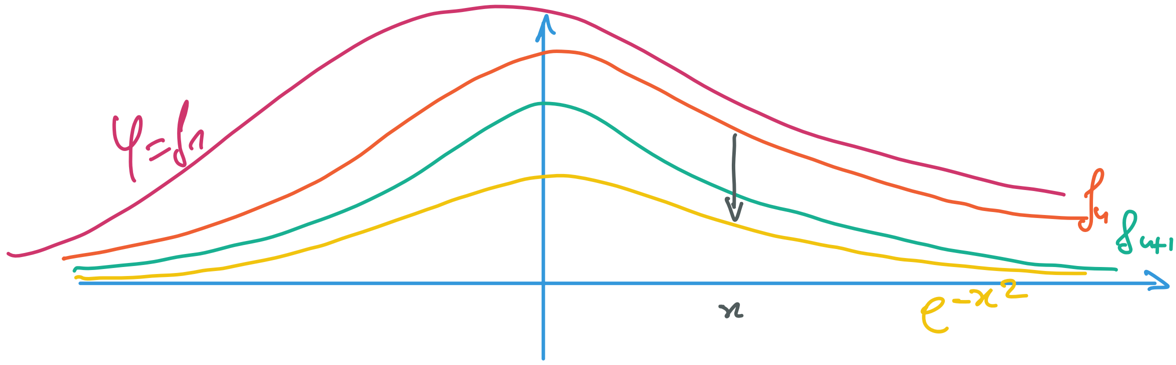
$$= \frac{-x^4}{t(t+x^2)^2} < 0 \quad \forall x\neq 0$$

t	0		$+\infty$
φ''		$-$	
φ'		$+ \searrow$	0
φ		$\nearrow$	

Ainsi: $\forall x\in\mathbb{R}$ $f_{n+1}(x) = e^{-\varphi(n+1)}$

$$\leq e^{-\varphi(n)} = f_n(x)$$

À x fixé, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante



$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} \quad |f_n(x)| \leq f_1(x)$

$= e^{-1 \ln\left(1+\frac{x^2}{1}\right)}$

$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ cont sur $]-\infty,+\infty[$ $\quad = \frac{1}{1+x^2}$ indépendante de n

Au vois de $\pm\infty$, $\frac{1}{1+x^2} \sim \frac{1}{x^2}$ intégrable en $\pm\infty$

donc $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ intégrable sur $]-\infty,+\infty[$ $\quad$ intégrable sur $]-\infty,+\infty[$

Donc par cv dominée, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$

valeur $\sqrt{\pi}$

Remarque:

- Dans le cas où, à x fixé, $(f_n(x))_n$ décroît

$f_n(x) \geq 0$ $\quad$ on peut choisir $\varphi(x) = f_1(x)$

- Dans le cas où, à x fixé, $(f_n(x))_n$ croît

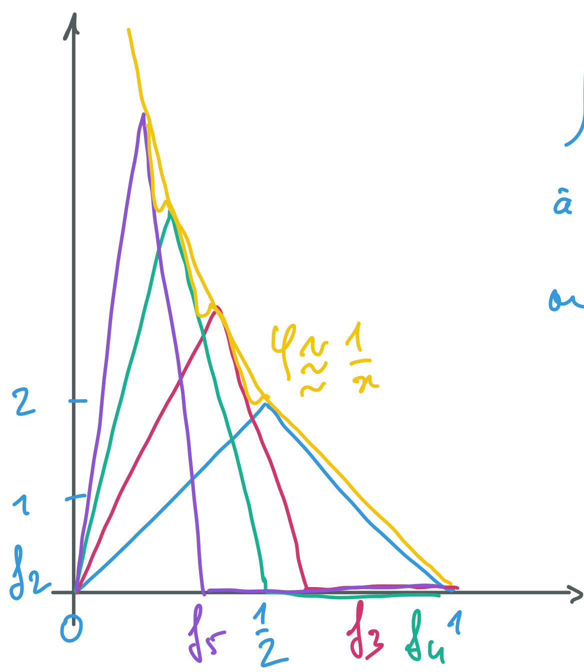
on peut choisir $\varphi(x) = f(x)$ (la limite)

• ~~Attention !~~ On veut une fonction dominante, φ, intégrable sur tout l'intervalle d'intégration

$\longrightarrow$ étude locale aux bornes ...

Exemple. Mettre en évidence l'importance de l'hypothèse de domination en considérant la suite de fonctions définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ n(2-nx) & \text{si } \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{2}{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n} \cdot n = 1$$

à n fixé, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

on n'a pas

$$\cancel{\int_0^1 f_n(x)\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 0\,dx}$$