Pour jé : 103.3, 103.17, 103.23

Pour lui : ex à rédiger 103.26 ou 204.16

## 3 Trigonalisation

**Définition.** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que $u$ est **trigonalisable** si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de $E$ telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \text{ est triangulaire supérieure}$$

**Définition.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que $A$ est **trigonalisable** si et seulement si l'endomorphisme canoniquement associé à $A$ est trigonalisable.

**Remarque.** *Trigonaliser un endomorphisme $u$, c'est déterminer une base de vecteurs dans laquelle la matrice représentant $u$ est triangulaire.*
*Trigonaliser une matrice $A$, c'est déterminer une matrice $T$ triangulaire et une matrice $P$ inversible telles que $A = PTP^{-1}$.*
*Réduire un endomorphisme $u$ (resp. une matrice $A$), c'est le diagonaliser ou le trigonaliser.*

**Proposition.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $A$ est **trigonalisable** si et seulement elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

"réduire" $A$, c'est diagonaliser ou trigonaliser.

**Proposition.** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) trigonalisable. Alors les éléments diagonaux d'une matrice triangulaire représentant $u$ (resp. triangulaire semblable à $A$) sont les valeurs propres de $u$ (resp. $A$) comptées avec multiplicité.

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{semblable à } A$$

$\lambda_1 \dots \lambda_n$ sont les vp de $A$ (répétées selon multiplicité)

Justif : $A = PTP^{-1}$

donc $\chi_A(X) = \chi_T(X)$

$$= \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$$

donc les $\lambda_i$ sont les vp de $A$.

Remarque :

$$T^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & & * \\ & \lambda_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_n^2 \end{pmatrix}$$

en effet : $[T^2]_{ii} = \sum_{k=1}^{n} t_{ik} t_{ki}$ avec $t_{ik} = 0$ si $i > k$

$t_{ki} = 0$ si $k > i$

$= 0 + t_{ii}^2 + 0$

Et puis $T^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$

**Théorème.**

$u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.

*Preuve.* La preuve, non exigible, est proposée en annexe au § 5.3. □

**Corollaire.** Si $E$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$), alors $u$ (resp. $A$) est trigonalisable.

Rmq : Cool !

Pas de méthode de trigonalisation ...

**Remarque.** *On peut aller un peu plus loin et imposer la forme a priori de la matrice triangulaire, mais cela dépasserait le cadre de notre programme.*

**Exemple.** Déterminer l'expression de la suite définie par :

$$u_0 = 1,\ u_1 = 1,\ u_2 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 11u_{n+2} - 39u_{n+1} + 45u_n$$

- On vectorialise le pb :

Notons $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$

$(u_n)_n$ satisfait $\forall n\ u_{n+3} = 11u_{n+2} - 39u_{n+1} + 45u_n$

$\iff \forall n \begin{cases} u_{n+1} = u_{n+1} \\ u_{n+2} = u_{n+2} \\ u_{n+3} = 45u_n - 39u_{n+1} + 11u_{n+2} \end{cases}$

$\iff \forall n\ \underbrace{\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix}}_{} X_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 45 & -39 & 11 \end{pmatrix}}_{\text{notée } A} X_n \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$

$\iff \forall n\quad X_{n+1} = A X_n$

$\iff \forall n\quad X_n = A^n X_0$ par récurrence.

- Réduction de A.

$* \ \chi_A(X) = X^3 - 11X^2 + 39X - 45$ comme matrice compagnon.

(on cherche des racines parmi les diviseurs de 45)

$[\ldots] = (X-3)^2(X-5)$

$\chi_A$ scindé donc $A$ est trigonalisable.

* Recherche de $E_3(A)$ :

$$E_3(A) = \mathrm{Ker}\,(A - 3I_3)$$

$$= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 45 & -39 & 8 \end{pmatrix}$$

$C_2, C_3$ non colinéaires donc $rg \geq 2$

3 vp donc $rg \leq 2$

donc $E_3(A)$ de dim 1

On remarque : $(A - 3I_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} = (0)$

Donc $E_3(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

* Recherche de $E_5(A)$ [...] $E_5(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 25 \end{pmatrix}$

On note $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 25 \end{pmatrix}$

$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

$V_3 = \begin{pmatrix} ? \end{pmatrix}$ tq $(V_1, V_2, V_3)$ base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$f$ end. canoniquement associé à $A$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$\mathrm{Mat}(f, (V_1, V_2, V_3)) = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} AV_1 & AV_2 & AV_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 5 & 0 & * \\ 0 & 3 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} & \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{array} \end{array}$$

$V_1 \in E_5(A)$

$V_2 \in E_3(A)$

On choisit $V_3$ comme on veut, $Mat(f,(V_1,V_2,V_3))$ est triangulaire.

**M1** Prenons par exemple $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$*$ $\det(V_1, V_2, V_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \\ 25 & 9 & 0 \end{vmatrix}$

$\overset{\text{dév } C_3}{=} (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 25 & 9 \end{vmatrix}$

$\neq 0$

donc $(V_1, V_2, V_3)$ base de $\mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$

$*$ $AV_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 45 \end{pmatrix}$ à exprimer en fct de $V_1, V_2, V_3$

On note $P = (V_1 | V_2 | V_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \\ 25 & 9 & 0 \end{pmatrix}$

On l'inverse

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 25 & 9 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & -5 & 1 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 15 & -8 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 15 & 15 & -8 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 5L_1 + L_2 \\ L_2 \leftarrow 3L_2 + L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 15 & 15 & -8 & 1 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2$$

donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -3/10 & 1/10 \\ 0 & 5/6 & -1/6 \\ 1 & -8/15 & 1/15 \end{pmatrix}$

$AV_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 45 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}(AV_3, \mathrm{can})$ noté $X$

Formule de changement de base : $X = PX'$

où $X' = \mathrm{Mat}(AV_3, (V_1, V_2, V_3))$

ie $X' = P^{-1}X$

$$= P^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 45 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 45/10 \\ -45/6 \\ 45/15 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9/2 \\ -15/2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ouf ! $T = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 9/2 \\ 0 & 3 & -15/2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

On a aussi donné $P$ et $P^{-1}$

$\underline{\text{M2}}$ Montrer que $A$ est semblable à $\left(\begin{array}{c|cc} 5 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$

On pose $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 25 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

On cherche $V_3$ tq $AV_3 = 3V_3 + V_2$ avec $V_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$AV_3 = 3V_3 + V_2 \iff (A - 3I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 45 & -39 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -3x + y = 1 \\ -3y + z = 3 \\ \cancel{45x - 39y + 8z = 9} \end{cases}$$

$$L_3 - 8L_2 : (45x - 15y = -15) = -15\, L_1$$

$$\iff \begin{cases} x = x \\ y = 1 + 3x \\ z = 3 + 3(1 + 3x) = 6 + 9x \end{cases}$$

On choisit $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

Alors, $P = (V_1 | V_2 | V_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 25 & 9 & 6 \end{pmatrix}$

$$\det(P) = 1.(18-9) - 1(30-25)$$
$$= 9-5 \neq 0$$

donc $(V_1, V_2, V_3)$ base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$

et $\text{Mat}(f, (V_1, V_2, V_3)) = \left(\begin{array}{c|cc} 5 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$ notée $T$

On a $A = P T P^{-1}$

- <u>Calculons $A^n$</u> $= P T^n P^{-1}$ par récurrence

$$T^n = \left(\begin{array}{c|cc} 5 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right)^n$$

$$= \left(\begin{array}{c|cc} 5^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$B^n$}} \\ 0 & & \end{array}\right) \quad \text{où } B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B^n = (3I_2 + J_2)^n \quad \text{où } J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (3I_2)^{n-k} J_2^k \quad \text{binôme avec } I_2 J_2 = J_2 J_2$$

avec $J_2^2 = 0$

$$= \binom{n}{0} 3^n I_2 + \binom{n}{1} 3^{n-1} J_2$$

$$= \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

Ainsi $T^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$

et $A^n = P T^n P^{-1}$

- <u>On en déduit $u_n$</u>

$$X_n = A^n X_0$$

$$= P T^n P^{-1} X_0 \qquad \text{où } P^{-1} X_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$= P \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$= \left( V_1 \middle| V_2 \middle| V_3 \right) \begin{pmatrix} \alpha 5^n \\ \beta 3^n + \gamma n 3^{n-1} \\ \gamma 3^n \end{pmatrix}$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 25 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha 5^n + \beta 3^n + \gamma n 3^{n-1} \\ * \\ * \end{pmatrix}$$

On a montré qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma$ tq

tq $u_n = \alpha 5^n + \beta 3^n + \gamma n 3^{n-1}$

$\gamma' n 3^n$

On cherche $\alpha, \beta, \gamma$ pour avoir $u_0 = 1$,
$u_1 = 1$
$u_2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 9/2 \\ 0 & 3 & -15/2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^n = \left[ \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 9/2 \\ 0 & 0 & -15/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]^n$$