Pour moi : 103.2, 103.5, 103.6

2 Diagonalisation et polynômes annulateurs

2.1 Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème de Cayley-Hamilton.

Le polynôme caractéristique de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un polynôme annulateur de A :

$$\chi_A(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$$

Théorème de Cayley-Hamilton.

Le polynôme caractéristique de $u \in \mathcal{L}(E)$ est un polynôme annulateur de u :

$$\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Preuve. La preuve, non exigible, est proposée en annexe au § 5.1. □

Peu utile en pratique.

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$J^2 = nJ$

$X(X-n)$ annulateur de J

scindé simple donc J diagonalisable

2.2 Polynômes annulateurs scindés et diagonalisabilité

Théorème.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si elle admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Théorème.

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement s'il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Preuve. La preuve, non exigible, est proposée en annexe au § 5.2. □

Super!

Attention. *On ne confondra pas polynôme annulateur et polynôme caractéristique, ni « existence d'un polynôme annulateur scindé simple » avec « le polynôme caractéristique est scindé simple ».*

Rappel : Si χ_u est scindé simple, alors u diagonalisable C.S

χ_u est annulateur de u Cayley-Hamilton

Preuve : Mque u diagonalisable $\Leftrightarrow \exists P$ scindé simple tq $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose u diagonalisable. E de dim n

On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses v.p distinctes

Posons $P = (X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_p)$

$P(u) = (u-\lambda_1 \mathrm{Id}) \circ \cdots \circ (u - \lambda_p \mathrm{Id})$

$\chi_u = (X-\lambda_1)^{m_1} \cdots (X-\lambda_p)^{m_p}$

Mque $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$

On a : $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$ car u diagonalisable

Soit $x \in E$

On écrit $x = x_1 + \cdots + x_p$ selon $\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$

On a alors :

$$P(u)(x_i) = \left[\prod_{k=1}^{p} (X-\lambda_k)\right](u)\,(x_i)$$

$$= \Bigg[\underbrace{\left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{p} (X-\lambda_k)\right)}_{Q(X)}(X-\lambda_i)\Bigg](u)\,(x_i)$$

$$= Q(u)\circ\left(u-\lambda_i \mathrm{Id}_E\right)(x_i)$$

$$= Q(u)\left[\,0\,\right] \quad \text{car } x_i \in E_{\lambda_i}(u)$$

$$= 0$$

Donc, par somme, $P(u)(x) = 0 \quad \forall x \in E$

Ainsi <u>P est annulateur de u</u>

(il est scindé simple)

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose qu'il existe un polynôme annulateur scindé simple de u.

On le note $P = \prod_{i=1}^{q} (X-\mu_i)$

$\mu_1 \dots \mu_q$ distincts

On a $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. $\quad Sp(u) \subset \{\text{racines de } P\}$

Notons $L_i(X) = \prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{q} \dfrac{(X-\mu_j)}{(\mu_i-\mu_j)}$

$$L_i(\mu_j) = \delta_{ij}$$

et pour tout polynôme $R \in \mathbb{R}_{q-1}[X]$ $R(X) = \sum_{i=1}^{q} R(\mu_i) L_i(X)$

en part $\sum_{i=1}^{q} L_i(X) = 1$

et donc $\underline{\sum_{i=1}^{q} L_i(u) = Id_E}$

On a donc : $\forall x \in E$

$$x = L_1(u)(x) + \cdots + L_q(u)(x)$$
$$\in \sum_{i=1}^{q} \operatorname{Im} L_i(u)$$

<u>Ainsi</u> $E \subset \sum_{i=1}^{q} \operatorname{Im} L_i(u)$

Où va-t-on ? Mq $\sum E_{\lambda_i}(u) = E$

on va mq : $\operatorname{Im} L_i(u) \subset E_{\mu_i}(u)$

Soit $i \in \{1, .., q\}$ Mq $\underline{\operatorname{Im} L_i(u) \subset \operatorname{Ker}(u - \mu_i Id)}$

On a $P(X) = (X - \mu_1) \cdots (X - \mu_q)$
$$= (X - \mu_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{q} (X - \mu_j)$$

$$= (X-\mu_i)\, L_i(X) \times \underbrace{\prod_{j \neq i} (\mu_i - \mu_j)}_{\text{scalaire } \alpha}$$

$$= \alpha (X-\mu_i)\, L_i(X)$$

Donc :

$$0_{\mathcal{L}(E)} = P(u) = \alpha (u - \mu_i Id_E) \circ L_i(u)$$

$$f \circ g = 0_{\mathcal{L}(E)} \iff \operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$$

donc $\operatorname{Im} L_i(u) \subset \underbrace{\operatorname{Ker}(u - \mu_i Id_E)}_{\text{noté } E_{\mu_i}(u)}$

$E_{\mu_i}(u)$ est $\begin{cases} \text{espace propre de } u \text{ si } \mu_i \in Sp(u) \\ \{0_E\} \text{ si } \mu_i \notin Sp(u) \end{cases}$

- Ainsi : $E \subset \sum_{i=1}^{q} \operatorname{Im} L_i(u)$
  $\subset \sum_{i=1}^{q} E_{\mu_i}(u) \subset E$

donc il y a égalité : E est somme (directe) d'espaces propres de u.

Exemple : $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

$X(X-n)$ est annulateur de J

$X(X-n)(X+n)$ est annulateur de J

$X^3(X-n)$ est annulateur de J

$\chi_J = X^{n-1}(X-n)$ est annulateur de J

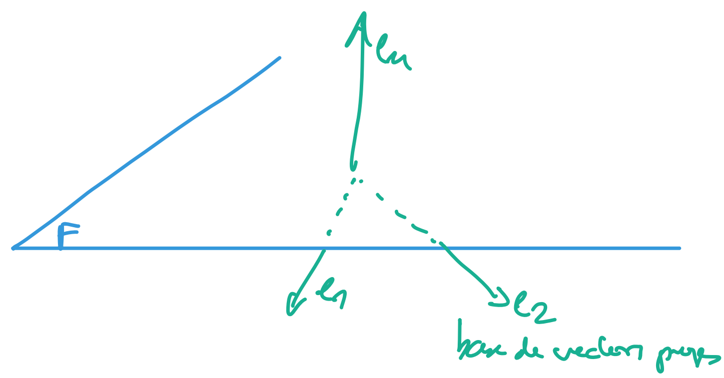
Proposition. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E. Si u est diagonalisable et F stable par u, alors l'endomorphisme induit u_F induit par u sur F est diagonalisable.

Corollaire. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $E = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k$ où chaque F_k est stable par u, alors u est diagonalisable si et seulement si chaque endomorphisme induit u_{F_k} par u sur F_k est diagonalisable.

Corollaire. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E. On suppose u diagonalisable. Alors F est stable par u si et seulement si F est engendré par une famille de vecteurs propres de u.

Remarque. *Ce dernier résultat est faux si u n'est pas diagonalisable.*

Ah bon ?!



F stable par u

$u : E \longrightarrow E$, $x \longmapsto u(x)$

$u_F : F \longrightarrow F$, $x \longmapsto u(x)$

Preuve: On suppose u diagonalisable

donc $\exists P$ scindé simple tq $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$

donc $P(u_F) = 0_{\mathcal{L}(F)}$ $\square$

Preuve:

$E = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k$ $\quad$ F_k stable par u

$\boxed{\Rightarrow}$ Si u diagonalisable

chq u_{F_k} l'est aussi par th précédent

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose chq u_{F_k} diagonalisable

Donc il existe $\mathcal{B}_k$ base de F_k formée de vecteurs propres de u_{F_k}, ie de vecteurs propres de u.

Comme $E = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k$, $\text{Concat}_{k=1}^{p}\, \mathcal{B}_k$ est une base de E formée de vecteurs propres de u donc u diagonalisable.

Rmq: idée : on étudie u en travaillant sur des espaces de petites dimensions.

Théorème.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (X - \lambda)$ annule A.

Théorème.

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement si $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ annule u.

On connaît $\mathrm{Sp}(u)$

On regarde si $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ annule u.